МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ НОВОСИБИРСКОЙ ОБЛАСТИ

Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Новосибирской области
«НОВОСИБИРСКИЙ КОЛЛЕДЖ ПЕЧАТИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

Методическая разработка
для решения задач при изучении раздела Динамика
по Технической механике

по программам подготовки специалистов среднего звена:

29.02.07 «Производство изделий из бумаги и картона»,

29.02.09 «Печатное дело»

2022

Рассмотрены и рекомендованы предметно-цикловой комиссией профессиональных циклов специальностей «Издательское дело», «Печатное дело», «Производство изделий из бумаги и картона», «Документационное обеспечение управления и архивоведение», и профессии «Печатник плоской печати» государственного автономного профессионального образовательного учреждения Новосибирской области «Новосибирский колледж печати и информационных технологий»
№ 4 от 14.12. 2022 г.

Председатель ПЦК ________________ Олейник Ж.Г.

Организация-разработчик:

Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение Новосибирской области «Новосибирский колледж печати и информационных технологий»

Рецензент: Толочко Александр Иосифович

/Авторы - составители: Ковалева Л.Н.– Новосибирск: ГАПОУ НСО «НКПиИТ», 2022.

Данное методическое указание соответствует рабочей программе дисциплины «Техническая механика», которая нацелена на формирование у студентов базовых знаний. Методическое указание содержит задания по технической механике, раздел кинематика.

Предназначена для студентов обучающихся по специальностям «Печатное дело», «Производство изделий из картона и бумаги».

При написании рекомендаций были использованы требования ГОСТ Р 7.0.100– 2018 Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления. Издание официальное, ГОСТ 7.32— 2017 Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу, Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления. Издание официальное.

Оглавление

Введение

С развитием механики как науки в ней появился целый ряд самостоятельных областей, связанных с изучением механики твердых деформируемых тел, жидкостей, газов, тел переменной массы. К этим областям относится теория упругости, теория пластичности, гидромеханика, аэромеханика, газовая динамика и ряд разделов так называемой прикладной механики, например: статика сооружений, сопротивление материалов, гидравлика, а также многие специальные инженерные дисциплины. Однако во всех областях, наряду со специфическими для каждой из них методами и закономерностями, общий метод научных исследований состоит в том, что при рассмотрении того или иного явления в нем выделяют главное, определяющее, а от всего остального, сопутствующего данному явлению, абстрагируются. В результате вместо реального явления или объекта рассматривают некоторую модель и вводят ряд абстрактных понятий, отражающих соответствующие свойства этого объекта (явления).

Исходные понятия и общие принципы механики, а также основы механики твердых тел, излагают в дисциплине, которую называют теоретической механикой, состоящей из трех разделов: статики, кинематики и динамики.

В теоретической механике абстракциями или моделями являются, по существу, все вводимые исходные положения и понятия. Так, например, вместо реальных материальных тел в механике рассматривают такие абстрактные модели, как материальная точка, абсолютно твердое тело, сплошная изменяемая среда и др. В первом случае абстрагируются от учета формы и размеров тела, во втором – его деформацией, в третьем – от молекулярной структуры среды. Только построив механику такого рода моделей, можно применять методы, позволяющие, например, изучать с пригодной для практики точностью равновесие и движение реальных объектов, проверяя в свою очередь эту пригодность практикой.

Статика рассматривает методы преобразования сил в

эквивалентные системы и устанавливает условия равновесия сил, приложенных к точкам твердого тела. Кинематика изучает движение тел с геометрической точки зрения, то есть вне связи с их массами и силами, определяющими это движение. Но между действующими на тело силами и движением тела существует глубокая связь. Изучение движения материальных объектов с учетом действующих на них сил является главным содержанием динамики.

Теоретическая механика выступает как теоретическая база для других общетехнических и специальных дисциплин, к которым, в частности, относятся сопротивление материалов, строительная механика, теория машин и механизмов, детали машин, гидравлика и др.

Хорошее усвоение курса требует как глубокого изучения теории, так и приобретения твердых навыков в решении практических задач. Представленные примеры, задачи и контрольные вопросы позволяют студенту не только приобрести знания в областях указанных разделов курса, но сформировать умения и навыки, позволяющие обоснованно выбирать и эксплуатировать различные технические средства опытных и промышленных технологий.

1. ДИНАМИКА

Динамика - радел теоретической механики, в котором изучается движение материальных точек, тел и механических систем с учетом действующих на них сил и начальных условий.

В зависимости от используемых материальных объектов динамика условно делится на три части: динамика материальной точки; динамика материального тела; динамика механической системы.

1.1 Законы динамики

В основе динамики лежат законы, сформулированные Ньютоном.

Первый закон - закон инерции: материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие других тел не изменит это состояние.

Существует по крайней мере одна система отсчета, относительно которой изолированная материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

Системы отсчета, в которых справедлив принцип инерции, называются *инерциальными системами отсчета*.

Инертность - это свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.

Количественной мерой инертности данного тела является физическая величина, называемая массой тела.

Масса тела - величина скалярная, всегда положительная. При этом в теоретической механике масса тела принята за постоянную величину.

Второй закон - основной закон динамики - устанавливает связь между ускорением $\overline{a}$, массой материальной точки m и силой $\overline{F}$: ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F}.$$

Из второго закона динамики следует линейная зависимость между *модулем силы* и *модулем ускорения*: $F = ma$.

Массу m точки, определенную по второму закону Ньютона, называют *инертной* массой:

$$m = F / a.$$

Если это уравнение применить к материальной точке, находящейся под действием силы тяжести G, получим:

$$m = G / g,$$

где $g = 9{,}81$ $м/с^2$ - ускорение свободного падения (для средних широт).

Масса m точки, вычисленная на основании закона всемирного тяготения, называется *гравитационной* массой. Опыты не обнаружили различия между инертной и гравитационной массой материального тела.

Третий закон - закон действия и противодействия:

всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Закон устанавливает, что при взаимодействии двух тел, в каком бы кинематическом состоянии они не находились (в покое или движении), силы, приложенные к каждому из них, равны по модулю и направлены по одной (общей) линии действия, но в противоположные стороны.

Четвертый закон (*принцип независимости действия сил*) не был сформулирован Ньютоном как отдельный закон механики, но таковым считают сделанное им обобщение *правила параллелограмма сил*: если на материальную точку действует несколько сил, то ускорение, получаемое точкой, будет такое же, как и при действии одной силы, равной геометрической сумме этих сил.

Следствие. Основное уравнение движения свободной точки под действием системы сил в векторной форме записывается:

$$m \cdot \overline{a} = \sum_{\mu=1}^{n} \overline{F}_{\mu} \qquad (☼)$$

На практике часто приходится решать технические задачи, связанные с изучением движения *несвободной* точки, когда точка из-за наложенных на нее связей принуждена двигаться по заданной линии или поверхности. В этом случае для исследования движения точки надо применять *аксиому освобождения от связей*: движение и равновесие несвободной материальной точки не изменится, если считать ее свободной, заменив действие связей их реакциями.

Основное уравнение динамики несвободной материальной точки в векторной форме имеет вид:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F} + \overline{N},$$

где $\overline{F}$ − равнодействующая заданных сил, приложенных к точке; $\overline{N}$ − равнодействующая реакций связей, наложенных на точку.

1.2 Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Существуют различные формы представления основного уравнения (☼) динамики точки.

1.2.1. Дифференциальное уравнение движения точки в

$\overline{r} = \overline{r}(t)$, то из теории кинематики точки известно, что вектор $\overline{a}$ ускорения определяется как вторая производная по времени от радиус-вектора $\overline{r}$, то есть: $\overline{a} = \dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$.

Тогда дифференциальное уравнение движения точки в *векторной форме* записывается:

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{F}(\overline{r}, \overline{v}, t). \qquad (1.1)$$

1.2.2. Дифференциальные уравнения движения точки в координатной форме. Если спроецировать обе части уравнения движения точки, заданного в векторной форме (1.1), на координатные оси $x, y, z,$ получают уравнения движения точки в *координатной форме*:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \qquad (1.2)$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z.$$

1.2.3. Дифференциальные уравнения движения точки в естественной форме (уравнения Эйлера). Для описания движения точки в естественной форме, нужно спроецировать дифференциальное уравнение (1.1), заданное в векторной форме, на естественные оси: касательную (τ), главную нормаль (n) и бинормаль (b). В результате получаются дифференциальные уравнения движения точки в *естественной форме*:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = F_\tau,$$
$$m\frac{(dS \cdot dt)^2}{\rho} = m\frac{v^2}{\rho} = F_n, \qquad (1.3)$$
$$0 = F_b.$$

1.3 Основные задачи динамики материальной точки

При всем разнообразии динамических задач в теоретической механике выделяют две основные: *прямую* (первая) и *обратную* (вторая).

Для свободной материальной точки и прямая и обратная задачи решаются с помощью основного уравнения движения.

Решение прямой задачи обычно не составляет большого труда, так как получается дифференцированием известных функций. Обратная задача сложнее, потому что связана с необходимостью интегрирования основного уравнения движения материальной точки, а постоянные интегрирования определяются по начальным условиям ее движения.

1.3.1. Прямая (первая) задача динамики точки - по заданному закону движения и заданной массе точки определить силы, действующие на точку (в том числе и реакции связей, если точка не свободна).

Решение этой задачи сводится к определению ускорения точки и, следовательно, к дифференцированию по времени заданных уравнений ее движения.

При *векторном* способе задания движения точки используется уравнение (1.1).

При *координатном* способе задания движения предварительно находят проекции равнодействующей $\overline{F}$ всех сил, приложенных к точке, по формулам (1.2), а затем определяют величину и направление равнодействующей по формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \cos\gamma = \frac{F_z}{F}.$$

При *естественном* способе задания движения точки используются формулы (1.3), а модуль равнодействующей системы сил определяется по формуле: $F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2 + F_b^2}$.

Пример 1.1. *Дано*: Материальная точка массы m движется по окружности радиуса r согласно уравнению движения, заданному в естественной форме: $S = b + 2r \cdot \ln(t)$, где $b -$ постоянная величина.

Определить: величину равнодействующей F сил, приложенных к точке, как функцию времени.

Решение. Движение точки задано естественным способом, поэтому используем дифференциальные уравнения движения вида (1.3).

$$F_\tau = m\frac{d^2S}{dt^2}; \text{ так как } a = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{2r}{t^2}, \text{ получаем: } F_\tau = m\frac{2r}{t^2};$$

$$F_n = m\frac{v^2}{r}; \text{ так как } v = \frac{dS}{dt} = \frac{2r}{t}, \text{ получаем: } F_n = m\frac{4r}{t^2};$$

$$F_b = 0.$$

Таким образом, для заданного уравнения движения точки получаем модуль равнодействующей системы сил, приложенных к точке:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2 + F_b^2} = \sqrt{\left(m\frac{2r}{t^2}\right)^2 + \left(m\frac{4r}{t^2}\right)^2} = \frac{2mr\sqrt{5}}{t^2}.$$

1.3.2. Обратная (вторая) задача динамики точки - по заданной массе, известным силам, действующим на точку, и известным начальным условиям требуется определить закон (уравнение) движения этой точки.

Силы, действующие на точку, могут быть как постоянными, так и заданными функциями времени, координат и скорости точки:

$$F_x = f_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$
$$F_y = f_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$
$$F_z = f_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Начальными условиями движения материальной точки называются величины, которые определяют положение и скорость точки в начальный момент времени, т. е. в момент времени $t = 0$.

Решение обратной задачи динамики сводится к интегрированию дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (1.3).

Рассмотрим некоторые теоретические положения обратной задачи динамики точки на примере задачи в декартовой системе координат.

Допустим *заданы* параметры задачи:

- масса m точки;

- равнодействующая всех сил, проекции которой на оси x, y, z в декартовой системе координат зависят от координат точки, проекций скорости ее движения и времени;

- начальные условия движения, то есть, при $t = 0$ известны (заданы) начальные координаты x_0, y_0, z_0 и проекции $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ начальной скорости точки.

Требуется *найти* уравнения движения точки.

Решение. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в координатной форме, записанные в виде (1.2), могут быть записаны в эквивалентном виде - в виде системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m\ddot{x} = X(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$
$$m\ddot{y} = Y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$
$$m\ddot{z} = Z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t).$$

Нахождение уравнений движения заданной точки сводится к интегрированию системы данных уравнений.

Решение этой системы содержит шесть произвольных констант (постоянных величин). При этом, для движущейся точки, каждая из координат (x, y, z) зависит от времени t и всех шести констант, т. е.:

$$x = f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$

$$y = f_2(t, C_1, ..., C_6),$$
$$z = f_3(t, C_1, ..., C_6).$$

Константы $C_1, ..., C_6$ определяются из начальных условий.

Пример 1.2. Определить уравнения движение материальной точки массой m, брошенной с начальной скоростью $\overline{V_0}$ под углом α к горизонту. При движении на точку действует сила тяжести $\overline{F} = m\,\overline{g}$. Точка совершает движение в плоскости xOy. Начало системы координат совпадает с начальным положением точки. Сопротивлением воздуха пренебречь. Начальные условия движения точки:

$$t = 0,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ \dot{x}_0 = V_0 \cos\alpha,\ \dot{y}_0 = V_0 \sin\alpha,\ (\dot{z}_0 = 0).$$

Найти: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$.

Решение. Составим дифференциальные уравнения движения точки в *координатной форме*.

Так как на точку при ее движении действует только сила тяжести, направленная вниз (параллельно оси y), то система дифференциальных уравнений движения в координатной форме записывается в виде:

$$m\ddot{x} = 0;$$
$$m\ddot{y} = -mg.$$

$$\{\ \}$$

Из этой системы следует, что: $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = -g$. Интегрируем данные уравнения по времени и получаем:

$$\dot{x} = C_1;\ x = C_1 t + C_2;$$
$$\dot{y} = -gt + C_3;\ y = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

Используем полученные уравнения для нахождения констант C_1, C_2, C_3, C_4 с учетом начальных условий.

$$C_1 = \dot{x}_0 = V_0 \cos\alpha;\ C_2 = x_0 - C_1 \cdot 0 = 0;$$

$$C_3 = \dot{y}_0 + g \cdot 0 = V_0 \sin\alpha;\ C_4 = y_0 + g\frac{0}{2} - C_3 \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, уравнения движения точки:

$$x = V_0 \cdot t \cdot \cos\alpha;$$
$$y = -g\frac{t^2}{2} + V_0 \cdot t \cdot \sin\alpha.$$

Движение точки происходит в плоскости xOy Для установления траектории движения точки записываем уравнение траектории в каноническом виде $y = f(x)$. После преобразований, получаем:

$$y = x \cdot tg\alpha - \frac{x^2 g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Следовательно, траекторией движения точки в плоскости xOy является участок ветви параболы.

Пример 1.3. Материальная точка массой m начинает движение в сосуде цилиндрической формы в вязкой жидкости (рисунок 1.1).

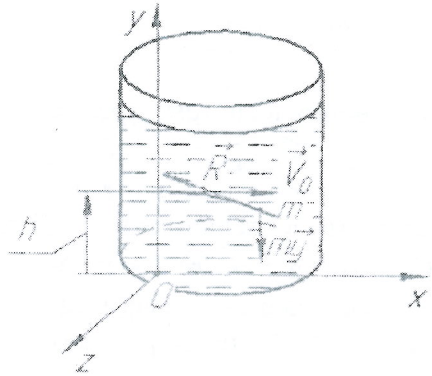

Рисунок 1.1

Горизонтальная начальная скорость точки равна по модулю V_0

$x_0 = 0$, $y_0 = h$, $z_0 = 0$. На точку действуют сила тяжести $\overline{P} = m\overline{g}$ $\overline{R}$, пропорциональная скорости точки, то есть $\overline{R} = -k \cdot m \cdot \overline{v}$, где $k -$ постоянная величина.

Определить уравнения движения точки: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ для начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = h$, $z_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_0$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$.

Решение. Составим дифференциальные уравнения движения точки в координатной форме относительно декартовых осей:

$$\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = -km \;;$$

$$\dot{y} - mg$$

$$m\ddot{y} = -km \;;$$

$$\dot{z}$$

$$m\ddot{z} = -km \;.$$

Преобразуем уравнения в систему трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} + k\dot{x} = 0; \\ \ddot{y} + k\dot{y} = -g; \\ \ddot{z} + k\dot{z} = 0. \end{cases}$$

Решаем уравнение относительно оси x. Допустим:

$x = Ce^{rt}$; тогда $\dot{x} = Cre^{rt}$ и $\ddot{x} = Cr^2e^{rt}$.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$Cr^2e^{rt} + kCre^{rt} = 0;$ или $r^2 + kr = 0$.

Корни характеристического уравнения: $r_1 = 0$, $r_2 = -k$.

Следовательно, $x = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$. Таким образом, имеем:

$$x = C_1 + C_2e^{-kt}. \qquad \mathbf{(1)}$$

Аналогично решаем уравнение относительно оси z. Получим:

$$z = C_5 + C_6e^{-kt}. \qquad \mathbf{(2)}$$

Известно, что общее решение дифференциального уравнения вида:

$$\ddot{y} + k\dot{y} + g = 0$$

равно сумме двух решений: общего решения однородного уравнения

$$y^{\text{îài}} = C_3 + C_4e^{-kt};$$

и частного решения неоднородного уравнения $y^* = At$, то есть:

$$y = y^{\text{îài}} + y^*.$$

Найдем значение коэффициента A. Для этого дифференцируем уравнение y^*; получаем: $\dot{y}^* = A$ и $\ddot{y}^* = 0$. Подставляем эти значения производных в дифференциальное уравнение движения относительно оси y и получаем:

$0 + kA + g = 0$, тогда $A = -\dfrac{g}{k}$. откуда $y^* = -\dfrac{g}{k}t$

Тогда уравнение движения точки относительно оси y имеет вид:

$$y = C_3 + C_4e^{-kt} - \frac{g}{k}t. \qquad \mathbf{(3)}$$

Таким образом, общее решение системы дифференциальных уравнений движения точки в сосуде с жидкостью представляет собой систему из трех уравнений **(1)**, **(2)**, **(3)**.

Определяем проекции скорости точки на соответствующие оси координат: $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$. Имеем:

$$\dot{x} = -C_2ke^{-kt},\; \dot{y} = C_4ke^{-kt} - \frac{g}{k},\; \dot{z} = -C_6ke^{-kt}.$$

Используя начальные условия, определяем константы уравнений.

$$\dot{x} = V_0 = -C_2k,\; C_2 = -\frac{V_0}{k};$$

$$\dot{y} = 0 = C_4k - \frac{g}{k},\; C_4 = -\frac{g}{k^2};$$

$$\dot{z} = 0 = -C_6k,\; C_6 = 0;$$

$$x_0 = 0 = C_1 - \frac{V_0}{k},\ C_1 = \frac{V_0}{k};$$

$$y_0 = h = C_3 + C_4,\ C_3 = h + \frac{g}{k^2};$$

$$z_0 = C_5,\ C_5 = 0.$$

Подставляем константы $C_1,..., C_6$ в уравнения **(1)...(3)**, получаем искомые уравнения движения точки в координатной форме:

$$x = \frac{V_0}{k}(1 - e^{-kt}),$$

$$y = h + \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt} - kt),$$

$$z = 0.$$

Перемещение точки происходит в плоскости xOy.

1.4 Понятие о силах инерции. Метод кинетостатики

Решение задач динамики можно осуществить, используя принцип кинетостатики для материальной точки. Для этого вводят силу инерции.

Пусть на материальную точку M действует некоторая система сил $F_1,..., F_n$ (рисунок 1.2). Среди сил могут быть активные силы и реакции связей.

На основании **аксиомы** независимости действия сил точка M под действием приложенных сил получит такое же ускорение, как если бы на нее действовала лишь одна сила, равная геометрической сумме заданных сил: $\overline{F}_\Sigma = \overline{F}_1 + ... + \overline{F}_n$, где $\overline{F}_\Sigma$ – равнодействующая системы активных сил и реакций связи. При этом $\overline{F}_\Sigma = m\overline{a}$, где m – масса точки; a – ускорение точки.

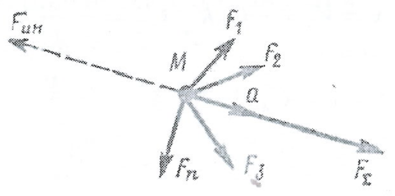

Рисунок 1.2

Приравниваем правые части уравнений для $\overline{F}_\Sigma$, переносим вектор $m\overline{a}$ в правую часть, после чего получаем сумму векторов, равную нулю:

$$-m\overline{a} + \overline{F}_1 + ... + \overline{F}_n = 0. \qquad (*)$$

Ведем обозначения: $-m\overline{a} = \overline{F}_{\text{èi}}$ и $\overline{F}_\Sigma = \overline{F} + \overline{N}$.

Тогда приведенное уравнение (*) можно записать в виде:

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{F}_{\text{èi}} = 0,$$

где $\overline{F}$ – равнодействующая всех активных (заданных) сил, приложенных к точке; $\overline{N}$ – равнодействующая реакций связей, наложенных на точку; $\overline{F}_{\text{èi}}$ – сила инерции (*сила, равная произведению массы точки на ее ускорение, направленная в сторону, противоположную ускорению*).

Таким образом, из последнего уравнения следует, что в каждый данный момент времени все активные силы и силы реакции связей, приложенные к точке, уравновешиваются силами инерции. Этот вывод называют началом (принципом) Даламбера (*Д'Аламбера*). Он может быть применен не только к материальной точке, но и к твердому телу или системе тел. В последнем случае он формулируется следующим образом:

если ко всем действующим силам, приложенным к движущемуся телу или системе тел, приложить силы инерции, то полученную систему сил можно рассматривать как находящуюся в условном равновесии.

Применение начала Даламбера позволяет при решении динамических задач использовать уравнения равновесия статики. Такой прием решения задач динамики носит название **метода (принципа) кинетостатики**.

Сила инерции в методе (принципе) кинетостатики - это вектор, приложенный к материальной точке:

$$\overline{F}_{\text{èi}} = -m\overline{a};$$

Следует подчеркнуть, что силы инерции действительно существуют, но приложены не просто к движущимся телам, а к телам, которые совершают движение при $a \neq 0$.

Рассмотрим определение силы инерции, приложенной к каждой материальной точке тела в различных случаях его движения.

Пусть точка M массой m движется ***прямолинейно*** со скоростью V и ускорением a (рисунок 1.3, *а*, *б*).

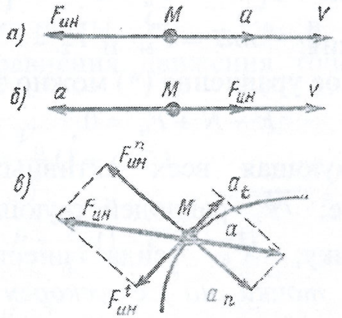

Рисунок 1.3

При прямолинейном движении направление ускорения совпадает с траекторией. Сила инерции направлена в сторону, противоположную ускорению, а ее модуль (численное значение) определяется по формуле как произведение массы точки на ее абсолютное ускорение:

$$F_{\text{èi}} = ma .$$

При ускоренном движении (рис. 1.3, *а*) направления ускорения и скорости совпадают, и сила инерции направлена в сторону, противоположную движению. При замедленном движении (рис. 1.3, *б*), когда ускорение направлено в сторону, обратную скорости, сила инерции действует по направлению движения.

Рассмотрим случай, когда точка M движется по ***криволинейной траектории*** (рис. 1.3, *в*) неравномерно, т. е $a \neq const$. Как известно из теории кинематики точки, ее ускорение $\overline{a}$ может быть разложено на две составляющие: нормальную $\overline{a}_n$ и касательную $\overline{a}_\tau$. Тогда сила инерции $\overline{F}_{\text{èi}}$ точки также раскладывается на две составляющие: касательную $\overline{F}_{\text{èi}}^{\tau}$ и нормальную $\overline{F}_{\text{èi}}^{\text{n}}$. Направления их действия противоположно

направлению соответствующих ускорений.

Модуль касательной составляющей силы инерции:

$$F_{\text{èi}}^{\tau} = ma_\tau .$$

Модуль нормальной составляющей силы инерции:

$$F_{\text{èi}}^{\text{n}} = ma_n .$$

Очевидно, что полная сила инерции равна геометрической сумме ее составляющих:

$$\overline{F}_{\text{èi}} = \overline{F}_{\text{èi}}^{\tau} + \overline{F}_{\text{èi}}^{\text{n}} .$$

Учитывая, что касательная и нормальная составляющие силы инерции взаимно перпендикулярны, модуль силы инерции определяется:

$$F_{\text{èi}} = \sqrt{(F_{\text{èi}}^{\tau})^2 + (F_{\text{èi}}^{\text{n}})^2} = m\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

Пример 1.4. Автомобиль массой $m = 500$ *кг* перемещается с постоянной скоростью $V = 60$ *км/ч* по дороге, профиль которой в вертикальной плоскости имеет очертание окружности, радиус которой $R = 100$ *м*, рисунок 1.4. Определить давление автомобиля на дорожное покрытие в крайнем нижнем положении.

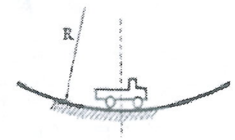

Рисунок 1.4

Решение. На автомобиль при его движении в нижнем положении дороги по вертикали действуют следующие силы: сила тяжести $G = mg$; нормальная реакция N со стороны дороги; сила инерции $F_{\text{èi}}$, направленная вниз, как и сила тяжести, так как траекторией движения автомобиля является часть дуги окружности.

Так как скорость автомобиля $V = cons$, то $a_\tau = 0$, $a_n = \dfrac{V^2}{R}$.

Следовательно, сила инерции при движении автомобиля равна

$$F_{\text{èi}} = F_{\text{èi}}^{\text{n}} = ma_n = m\frac{V^2}{R} .$$

Согласно принципу Даламбера имеем:

$$N - G - F_{\text{ëi}}^{\text{n}} = 0 .$$

Таким образом, при $V = 60$ *км/ч* $= 16{,}7$ *м/с*, получим:

$$N = G + F_{\text{ëi}}^{\text{n}} = mg + m\frac{V^2}{R} = 500 \cdot 9{,}81 + 500\frac{16{,}7^2}{100} = 6290\ H.$$

Величина реакции N со стороны дороги соответствует давлению, которое оказывает автомобиля на полотно дороги.

Пример 1.5. При прокладке железных дорог в скальных выемках устраивается горизонтальная полка *DC*, обеспечивающая защиту кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей (рисунок 1.5).

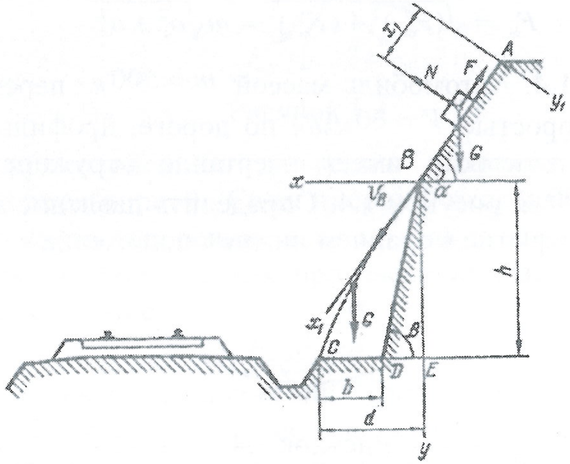

Рисунок 1.5

Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки *A* откоса, и полагая при этом его начальную скорость $v_A = 0$, определить наименьшую ширину b полки *DC* и скорость v_C, с которой камень падает на полку. По участку *AB* откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l, камень движется $\tau = 1$ секунд.

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения f камня на участке *AB* постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Необходимые для расчета численные значения исходных данных: $v_A = 0$; $\alpha = 60^{i}$; $l = 4$ *м*; $\tau = 1$ *с*; $f \neq 0$; $h = 5$ *м*; $\beta = 75^{o}$.

Определить ширину b полки *CD* и скорость v_C камня в точке *C*.

Решение. Рассмотрим движение камня на участке *AB* (ось x_1 направлена по линии *AB*, ось $y_1 \perp AB$). Как показано на рисунке 1.5, на камень действуют силы: сила тяжести G, нормальная реакция N и сила трения скольжения F. Составим дифференциальное уравнение движения камня на участке *AB* (как материальной точки):

$$m\ddot{x}_1 + \sum X_{IX1} = 0\,;$$

$$m\ddot{x}_1 + F - G\sin\alpha = 0\,,$$

где X_{IX1} - проекции сил, приложенных к камню, на ось координат x_1.

Сила трения: $F = fN$, где $N = G\cos\alpha$.

Таким образом, можно записать:

$$m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - fG\cos\alpha\,;$$

$$\ddot{x}_1 = g\sin\alpha - fg\cos\alpha\,.$$

Интегрируя последнее дифференциальное уравнение, получим:

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1\,;$$

$$x_1 = \left[g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2\right]\cdot t^2 + C_1 t + C_2\,.$$

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2 необходимо воспользоваться начальными условиями задачи, согласно которым камень при $t = 0$ находится в начале участка в точке *A* и имеет нулевую скорость. Следовательно, при $t = 0$ получим следующие уравнения:

$$\dot{x}_1 = v_A = 0 = C_1\,;$$

$$x_1 = x_A = 0 = C_2\,.$$

Таким образом, уравнение скорости и уравнение движения камня на участке *AB* имеют вид:

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot t\,;$$

$$x_1 = [g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2]\cdot t^2 .$$

Для момента τ, когда камень покидает участок AB, $\dot{x}_1 = v_B$ и $x_1 = l$, последние уравнения приобретают вид:

$$v_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot\tau ;$$

$$l = [g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2]\cdot\tau^2 ,$$

откуда скорость камня в точке B:

$$v_B = \frac{2l}{\tau} = \frac{2\cdot 4}{1} = 8 \text{ м/с.}$$

Рассмотрим движение камня на участке BC в системе координат xBy: ось x направим горизонтально (параллельно CD), ось $y \perp x$ (рис. 1.5). С учетом того, что на камень действует только сила тяжести G (сопротивлением воздуха пренебрегаем по условию задачи), дифференциальные уравнения движения камня на участке BC можно записать в виде:

$$m\ddot{x} = 0 ;\ m\ddot{y} = G .$$

Начальные условия задачи для участка BC (при $t = 0$):

$$x = 0,\ y = 0;\ \dot{x} = v_B\cos\alpha,\ \dot{y} = v_B\sin\alpha .$$

Интегрируем дифференциальные уравнения движения камня на участке BC:

$$\dot{x} = C_3,\quad x = C_3 t + C_5;\quad \dot{y} = gt + C_4,\quad y = gt^2/2 + C_4 t + C_6 .$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$:

$$\dot{x}_0 = C_3,\ x_0 = C_5;\ \dot{y}_0 = C_4,\ y_0 = C_6 .$$

Таким образом, находим, что:

$$C_3 = v_B\cos\alpha;\ C_4 = v_B\sin\alpha;\ C_5 = 0;\ C_6 = 0;$$

получаем следующие уравнения проекций скорости камня на оси x и y:

$$\dot{x} = v_B\cos\alpha;\ \dot{y} = gt + v_B\sin\alpha;$$

и уравнения его движения относительно осей x и y на участке BC:

$$x = v_B t\cos\alpha;\ y = \frac{gt^2}{2} + v_B t\sin\alpha .$$

Уравнение траектории камня в плоскости xBy

t из уравнений его движения относительно осей. Для этого выразим t из первого уравнения и подставим его во второе. В результате получим уравнение параболы:

$$y = \frac{gx^2}{2v_B^2\cos^2\alpha} + x\cdot tg\alpha .$$

С учетом того, что в момент падения камня $y = h$ найдем:

$$x_1 = 2{,}11 \text{ м};\ x_2 = -7{,}75 \text{ м}.$$

Так как траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек (ось y направлена вниз), то принимаем положительное значение $x_1 = 2{,}11 = d$. Тогда минимальная ширина полки равна:

$$b = d - ED = d - h/tg75^o = 2{,}11 - 5/tg75^o = 0{,}77 \text{ м}.$$

Используя уравнение движения камня относительно оси x, найдем время его движения на участке BC:

$$t = \frac{x_1}{v_B\cos\alpha} = \frac{2{,}11}{8\cdot 0{,}5} \approx 0{,}53 \text{ с}.$$

Скорость v камня при падении в точке C найдем через проекции скорости на оси x и y для момента падения $t = 0{,}53$ c по формуле:

$$v_C = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(v_B\cos\alpha)^2 + (gt + v_B\sin\alpha)^2} =$$

$$= \sqrt{(8\cdot 0{,}5)^2 + (g\cdot 0{,}53 + 8\cdot 0{,}86)^2} = 12{,}8$$

Таким образом, $v_C = 12{,}8$ м/с.

1.5 Основные динамические характеристики движения материальных тел

На основе общих теорем динамики установлены функциональные зависимости между основными динамическими характеристиками движения материальных тел. Это позволяют изучать отдельные, практически важные стороны динамики, не прибегая к методу интегрирования дифференциальных уравнений движения материальных тел, то есть избавляет от необходимости проделывать операции интегрирования для каждой задачи, что существенно упрощает процесс решения.

К числу общих теорем динамики относятся, в частности, теорема об изменении количества движения, теорема об изменении момента количества движения, теорема об изменении кинетической энергии, выражающая закон сохранения механической энергии.

1.5.1. Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении

Вычислим работу силы, постоянной по модулю и направлению, для случая, когда точка ее приложения перемещается по прямолинейной траектории. Предположим, что материальная точка C (рисунок 1.6), к которой приложена постоянная по значению и направлению сила F, за некоторый промежуток времени t переместилась в положение C_1 по прямолинейной траектории, пройдя расстояние S.

Вектор силы F с вектором перемещения $\overline{S}$ составляет угол α. В этом случае работу выполняет только та составляющая силы, которая совпадает с направлением вектора перемещения S:

$$A = FS\cos(\overline{F},\overline{S}) = FS\cos\alpha\ .$$

Угол α между направлением силы и направлением движения может меняться в пределах $0 \ldots 180^o$.

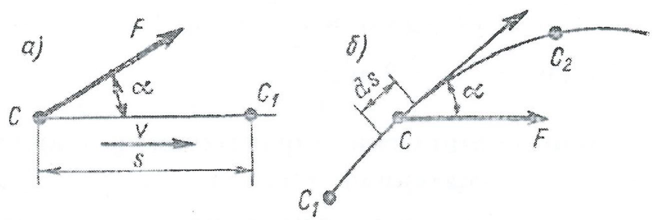

Рисунок 1.6

Если сила составляет с направлением движения угол $\alpha <$ 90^o, она называется движущей силой, ее работа всегда положительна. Если угол между направлениями силы и перемещения $\alpha > 90^o$, сила оказывает сопротивление движению, совершает отрицательную работу и носит название силы сопротивления. Примерами сил сопротивления могут служить

силы резания, трения, сопротивления воздуха и другие, которые всегда направлены в сторону, противоположную движению.

За единицу измерения работы в Международной системе единиц (СИ) принят джоуль (*Дж*), равный работе силы в один ньютон (*Н*) на совпадающем с ней по направлению участке движения длиной в один метр (*м*): 1 *Дж* = 1 *Нм*.

1.5.2. Работа силы на криволинейном перемещении

При криволинейном движении формулой для определения работы на прямолинейном перемещении пользоваться нельзя. В этом случае пользуются понятием элементарной работы на бесконечно малом участке пути dS, который можно считать прямолинейным (рис. 1.6, *б*). Работа определяется по формуле:

$$dA = FdS\cos(\overline{F},\overline{v})\,,$$

где $\overline{v}$ — вектор скорости точки, совпадающий по направлению с ее элементарным перемещением. Таким образом, полная работа на конечном пути определяется суммированием элементарных работ:

$$A = \int_{C1}^{C2} FdS\cos(\overline{F},\overline{v})\ .$$

Работа силы тяжести G не зависит от вида траектории, по которой перемещается центр тяжести тела, а определяется расстоянием по вертикали между начальной и конечной точками перемещения (перепадом высот). При этом если точка перемещается сверху вниз, то работа силы тяжести положительная:

$$A = GH = mgH\ ;$$

если точка перемещается снизу вверх - работа отрицательная:

$$A = -mgH\ .$$

Если сравнить между собой численные значения работы силы тяжести при перемещении тела из положения C_1 в положение C_2 по траекториям I, II и III (рисунок 1.7), приходим к выводу, что работа силы тяжести тела по всем трем траекториям одинакова, т. к. функционально зависит от перепада высот, но не пройденного пути.

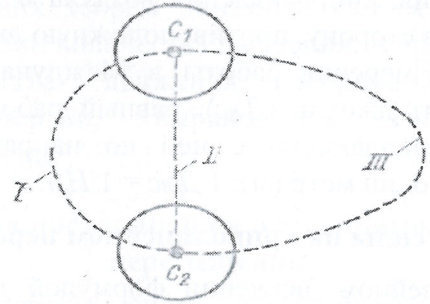

Рисунок 1.7

Работа силы тяжести *на замкнутом пути* равна нулю.

Пример 1.6. Определить работу силы тяжести при снижении самолета массой $12 \cdot 10^3$ *кг* из точки *A* в точку *B* (рисунок 1.8). В расчете сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. По условию задачи на самолет действует только сила тяжести (не учитываются силы сопротивления и другие динамические параметры), поэтому самолет можно принять за материальную точку.

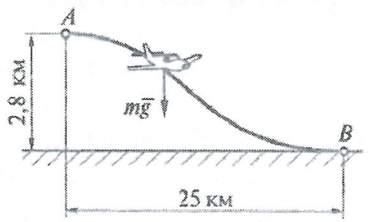

Рисунок 1.8

Тогда значение работы силы тяжести при перемещении центра тяжести самолета сверху вниз определится по формуле:

$$A = mgH = 12 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 2800 = 329{,}6 \cdot 10^6 \; Нм =$$
$$= 329{,}6 \; МНм = 329{,}6 \; МДж.$$

1.5.3. Работа упругой силы

Работа упругой силы определяется по формуле:

$$A = \frac{F_{\text{óïð}} S}{2},$$

где $F_{\text{óïð}}$ – упругая сила пружины, *Н*; определяется по формуле:

$$F_{\text{óïð}} = cS,$$

где S – перемещение точки приложения силы, *м*; c – коэффициент жесткости пружины, *Н*/*м*.

1.5.4. Работа силы при вращательном движении

Причиной вращательного движения тела вокруг неподвижной оси является вращательный момент M относительно оси, который создается парой сил или силой F (рисунок 1.9) и определяется по формуле:

$M = F\dfrac{D}{2} = FR$, *Нм*, где D, R – соответственно диаметр и радиус окружности (траектории) вращения тела.

При повороте тела на малый угол $d\varphi$ работа совершается силой F, точка приложения которой перемещается из положения C_1 в положение C_2. Полное перемещение точки на этом участке равно длине дуги радиусом R: $dS = R \cdot d\varphi$.

Так как сила F направлена по касательной к дуге перемещения S, то совершаемая работа при вращательном движении тела вокруг неподвижной оси определяется по формуле:

$$dA = F \cdot dS = F \cdot R \cdot d\varphi.$$

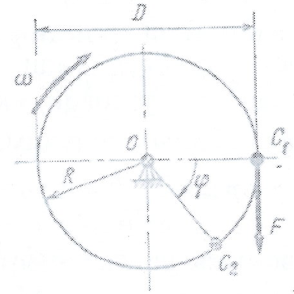

Рисунок 1.9

Учитывая, что $F \cdot R = M$, записываем:

$$dA = Md\varphi.$$

После интегрирования, формула для определения работы силы (пары сил) при вращении тела вокруг неподвижной оси имеет

вид:
$$A = M\varphi,$$
где $\varphi -$ угол поворота тела.

1.5.5. Мощность

Одна и та же работа может быть выполнена разными по величине силами за разные или одинаковые промежутки времени. Для взаимосвязи работы и времени ее выполнения в механике применяется понятие мощности: *мощность - работа, совершаемая силой в единицу времени.*

Средняя мощность P силы F за время Δt на перемещении ΔS, с которым сила образует угол α, определяется по формуле:
$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{FdS\cos\alpha}{dt}.$$

Если сила F совпадает с направлением движения (то есть $\cos\alpha = 1$), мощность определяется по формуле:
$$P = F\frac{dS}{dt} = Fv.$$

При вращательном движении тела вокруг неподвижной оси, мощность равна произведению вращающего момента (момента пары сил) на угловую скорость вращения вокруг этой оси:
$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{Md\varphi}{dt} = M\omega.$$
где $\omega -$ угловая скорость, *рад/сек* (или c^{-1}). Подставив в выражение мощности значение угловой скорости, выраженное через частоту n вращения (*об/мин*), получим:
$$P = M\frac{\pi \cdot n}{30}.$$

Преобразуем зависимость вида $P = f(M,n)$ в формулу для определения вращающего момента M во вращательном движении, т. е.:
$$M = \frac{30P}{\pi \cdot n}.$$

Из функциональной зависимости вида $M = f(P,n)$ следует, что при данной мощности двигателя максимальный вращающий

момент, который двигатель способен развить, можно изменить путем варьирования частоты вращения. Уменьшая частоту вращения, увеличивают вращающий момент и, наоборот, увеличивая частоту вращения, вращающий момент уменьшают.

Мощность измеряется в единицах работы, отнесенных к единице времени. За единицу мощности принят **ватт** (Вт) - мощность, равная работе в один джоуль в секунду:
$$\mathbf{1}\ \hat{A}\grave{o} = 1\frac{\ddot{A}æ}{\tilde{n}} = 1\ \acute{I}\ \frac{\grave{i}}{\tilde{n}};\ \ (1000\ \text{Вт} = 1\ \text{кВт}).$$

Пример 1.7. Определить значение силы F, приложенной к ободу колеса (рисунок 1.9), если сила передает мощность $P = 4\ кВт$ при частоте вращения колеса $n = 60\ об/мин$, диаметр колеса $D = 0{,}5\ м$.

Решение. Учитывая, что $M = F\frac{D}{2}$ и на основании формулы для определения вращающего момента вида $M = f(P,n)$ можно записать:
$$\frac{30P}{\pi \cdot n} = F\frac{D}{2};$$
откуда имеем:
$$F = \frac{2 \cdot 30P}{\pi \cdot n \cdot D} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 4000}{\pi \cdot 60 \cdot 0{,}5} = 2547{,}8\ H.$$

1.5.6. Коэффициент полезного действия

Создавая машину, например, технологическую, важно не только обеспечить движение ее рабочих органов, удовлетворяющих заданному технологическому процессу, но необходимо, чтобы машина обладала достаточно высоким коэффициентом полезного действия (кпд.).

При наличии сил трения и сопротивления воздуха или другой среды, в которой перемещаются конструктивные элементы машины, не вся затраченная работа $A_{çàò}$ используется в машинах или механических устройствах на полезную работу. Полезная работа всегда меньше затраченной работы, то есть $A_{ïîë} < A_{çàò}$, а отношение этих величин определяет важнейшую техникоэкономическую характеристику машины (аппарата, автомата и т.п.) — кпд.

Коэффициент полезного действия η оценивает эффективность работы машины и является числом отвлеченным (безразмерным).

При установившемся движении механизмов и рабочих органов машины сумма работ всех сил, приложенных к ним, будет равна нулю:

$$\grave{A}_{çàò} - \grave{A}_{ïîë} - \grave{A}_{\hat{A}\tilde{N}} = 0\ ;$$

или: $$\grave{A}_{çàò} = \grave{A}_{ïîë} + \grave{A}_{\hat{A}\tilde{N}};$$

или: $$\grave{A}_{ïîë} = \grave{A}_{çàò} - \grave{A}_{\hat{A}\tilde{N}}\ ,$$

где $\grave{A}_{\hat{A}\tilde{N}}$ — работа сил вредных сопротивлений (трение, сопротивление среды и т.п.). Таким образом, можно записать:

$$\eta = \frac{\grave{A}_{ïîë}}{\grave{A}_{çàò}} = \frac{\grave{A}_{çàò} - \grave{A}_{\hat{A}\tilde{N}}}{\grave{A}_{çàò}} = 1 - \frac{\grave{A}_{\hat{A}\tilde{N}}}{\grave{A}_{çàò}}\ .$$

Так как работа вредных сопротивлений $\grave{A}_{\hat{A}\tilde{N}}$ никогда не может быть равной нулю, то $\frac{\grave{A}_{\hat{A}\tilde{N}}}{\grave{A}_{çàò}} > 0$, следовательно, всегда $\eta <$ 1.

Чтобы увеличить кпд необходимо стремиться к уменьшению вредных сопротивлений и увеличению полезной работы, тогда величина кпд будет стремиться к единице.

1.5.7. Закон изменения количества движения

Количеством движения материальной точки называют вектор, имеющий направление скорости и модуль, равный произведению массы точки на ее скорость: $m\overline{V}$.

Вектор $m\overline{V}$ можно спроектировать: проекцией на ось x будет mV_x, проекциями на оси y и z, соответственно, mV_y и mV_z .

Единица измерения количества движения в системе единиц СИ:

$$[mV] = [m]\cdot[V] = \text{êã}\cdot\text{ì/ñ}\ .$$

Меру механического воздействия на материальную частицу

со стороны других материальных объектов за данный промежуток времени называют импульсом силы.

Импульс $\overline{S}$ постоянной силы - это вектор, равный произведению силы на время ее действия и имеющий направление силы.

Единица измерения импульса силы в системе единиц (СИ) равна единице количества движения:

$$[S] = [Ft] = [F]\cdot[t] = \text{Í}\cdot\text{ñ} = \text{êã}\cdot\text{ì/ñ}\ .$$

При постоянной силе: $\overline{S} = \overline{F}(t_2 - t_1)$, где t_2 и t_1 — конечный и начальный моменты времени; при переменной силе: $\overline{S} = \int_0^t \overline{F}dt$.

Установим закон изменения количества движения для случая, когда точка C движется прямолинейно под действием постоянной силы (рисунок 1.10). Согласно основному уравнению динамики, ускорение точки при этом — постоянно, и точка движется равнопеременно.

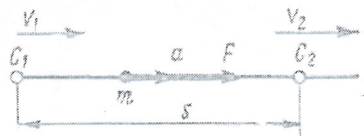

Рисунок 1.10

Скорость точки C в произвольный момент времени определяем по формуле равнопеременного движения

$$v_2 = v_1 + at\ ,$$

откуда

$$a = (v_2 - v_1)/t\ .$$

Подставим значение ускорения в основной закон динамики:

$$F = ma = m(v_2 - v_1)/t\ ;$$

или

$$Ft = mv_2 - mv_1\ .$$

Произведение Ft

$\overline{S} = m\overline{V} - m\overline{V_0}$, получаем:

$S = F(t_2 - t_1) = mv_2 - mv_1$.

Следовательно, алгебраическое приращение количества движения материальной точки при прямолинейном движении за время Δt равно импульсу действующей силы за тот же промежуток времени.

Пример 1.8. Контейнер, скользящий по наклонной плоскости, имел в начальный момент движения скорость $v = 2$ *м/с* (рисунок 1.11). Через $t = 5$ *с* он остановился ($v_2 = 0$) вследствие трения. Определить коэффициент трения контейнера о плоскость.

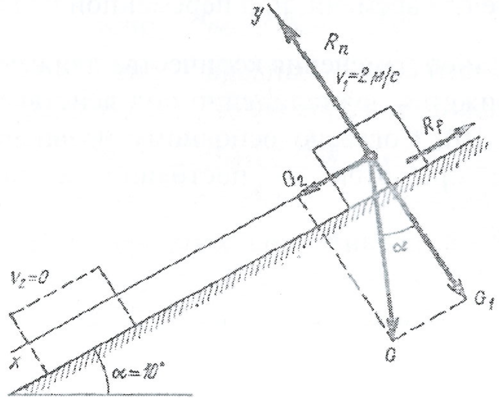

Рисунок 1.11

Решение. Разложив силу тяжести G контейнера вдоль наклонной плоскости и по нормали к ней, получим:

$$G_1 = G\cos\alpha;$$

$$G_2 = G\sin\alpha.$$

Составим уравнение равновесия проекций всех сил на ось y:

$$\sum F_{iy} = 0 = R_n - G_1.$$

Из этого уравнения определяем нормальную реакцию R_n со стороны плоскости на контейнер: $R_n = G_1 = G\cos\alpha$.

Сила трения R_f пропорциональна нормальной реакции R_n:

$$R_f = f \cdot R_n = f \cdot G \cdot \cos\alpha.$$

Решение задачи связано с анализом сил, действующих на движущееся тело. Поэтому необходимо составить уравнение импульса сил, действующих на контейнер вдоль оси $\tilde{o}$, получим:

$$S = (G_2 - R_f)t = (G\sin\alpha - fG\cos\alpha)t = G(\sin\alpha - f\cos\alpha)t.$$

Изменение количества движения тела равно импульсу сил:

$$mv_2 - mv_1 = S.$$

Следовательно, с учетом $m = G/g$, $v_1 = v$ и $v_2 = 0$, получаем:

$$\frac{G}{g}v_2 - \frac{G}{g}v = G(\sin\alpha - f\cos\alpha)t;$$

$$-\frac{v}{g} = t \cdot \sin\alpha - f \cdot t \cdot \cos\alpha.$$

Решаем получившееся уравнение относительно f:

$$f = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{v}{g \cdot t \cdot \cos\alpha} = tg\alpha + \frac{v}{g \cdot t \cdot \cos\alpha} =$$

$$= tg10^o + \frac{2}{9{,}81 \cdot 5 \cdot \cos 10^o} = 0{,}176 + 0{,}042 = 0{,}218.$$

Количеством движения *системы материальных точек* называется геометрическая сумма количества движения всех точек, входящих в систему:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i.$$

Момент количества движения материальной точки относительно центра: $\overline{L_o} = \bar{r} \times m\overline{V}$. Модуль момента: $L_o = mVh$, где h – плечо вектора $m\overline{V}$ относительно точки *O*.

Пример 1.9. Материальная точка массой $m = 5$ *кг* движется по оси OY согласно уравнению $y = 5t^2$ *м*.

Чему равен момент количества движения этой точки относительно центра *O* в момент времени $t = 2$ *с*?

Решение. Модуль момента количества движения определяется по уравнению $L_o = mVh$ h – плечо вектора $m\overline{V}$ относительно центра O. Так как точка перемещается по оси OY, то направление вектора $m\overline{V}$ совпадает с осью OY и, следовательно, проходит через центр O, то есть плечо $h = 0$.

Таким образом, $L_o = 0$.

Пример 1.10. Точка массой $m = 3$ *кг* движется по окружности радиусом $R = 2$ *м* по закону $s = 3\sin\frac{\pi}{3}t$ *м*. Чему равен момент количества движения точки относительно центра при $t = 1$ *с*?

Решение. В общем виде модуль момента количества движения относительно центра $Î$ равен $L_o = mVh$. В данном случае $h = R$, $V = \frac{ds}{dt} = \pi\cos\frac{\pi}{3}t$. Тогда для времени $t = 1c$ получаем:

$$L_o = m(\pi\cos\frac{\pi}{3}t)h = 3\cdot(\pi\cos\frac{\pi}{3}\cdot 1)\cdot 2 = 3\pi \text{ , êã} \cdot ì^{\,2}/ñ.$$

1.5.8. Потенциальная и кинетическая энергия

Основные формы механической энергии: потенциальная энергия, или энергия положения; кинетическая энергия, или энергия движения.

В механике *потенциальной энергией силы тяжести* материальной точки или тела называется способность этого тела или точки совершать работу при опускании с некоторой высоты до уровня моря (до какого-то нулевого уровня). Обозначив потенциальную энергию $E_{Ï}$, получим:

$$Å_{Ï} = GH,$$

где G — сила тяжести точки (или тела); H — высота центра тяжести от нулевого уровня.

Кинетическая энергия определяется способностью движущегося тела (материальной точки) совершать работу. Для материальной точки кинетическая энергия численно равна половине произведения ее массы на квадрат скорости, т. е. $mv^2/2$.

Всякое твердое тело или механическая система состоит из множества отдельных материальных точек. Поэтому кинетическую энергию твердого тела или какой-либо механической системы можно представить как сумму кинетических энергий всех точек, образующих тело или систему:

$$Å_{Ê} = \int \frac{v^2 dm}{2}$$, где dm — масса точки; v — скорость этой точки.

Потенциальная и кинетическая энергия измеряются в единицах работы:

$$[GH] = [G]\cdot[H] = Í \cdot ì = Äæ;$$

$$\left[\frac{mv^2}{2}\right] = [m][v^2] = \frac{êã \cdot ì \cdot ì}{ñ^2} = Í \cdot ì = Äæ.$$

Поступательное движение тела характеризуется тем, что скорости движения всех его точек равны между собой и имеют одинаковое направление. Кинетическая энергия тела в поступательном движении:

$$Å_{Ê} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{Mv^2}{2},$$

где M – масса всего тела; v – скорость центра тяжести тела или любой другой точки тела.

Найдем кинетическую энергию тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Если тело вращается вокруг оси с угловой скоростью ω, то скорость произвольной точки тела пропорциональна расстоянию этой точки до оси вращения: $v = \omega \cdot r$, где r — расстояние точки от оси вращения (величина переменная); ω — угловая скорость (для всех точек тела имеет одинаковое значение).

Подставим значение v в формулу кинетической энергии и вынесем постоянные величины за знак суммы, в результате получим:

$$Å_{Ê} = \int \frac{v^2 dm}{2} = \int \frac{(\omega r)^2 dm}{2} = \frac{\omega^2}{2}\int r^2 dm.$$

Численное значение интеграла $\int r^2 dm$, представляющее сумму произведений массы каждой частицы тела на квадрат ее расстояния до оси вращения, называется ***моментом инерции тела*** относительно этой оси, и обозначается J_z, где *z* – некоторая ось вращения тела.

Следовательно, кинетическая энергия тела, вращающегося

z , равна:

$$Å_{Ê} = J_Z \frac{\omega^2}{2}.$$

Плоскопараллельное движение можно разложить на два движения: поступательное вместе с некоторым полюсом и вращательное вокруг этого полюса. Соответственно, кинетическая энергия тела складывается из кинетической энергии поступательного движения вместе с полюсом и кинетической энергии вращательного движения вокруг этого полюса:

$$Å_{Ê} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где v — скорость поступательного движения полюса; ω — угловая скорость вращения тела, не зависящая от выбора полюса.

1.5.9. Моменты инерции некоторых однородных тел

Момент инерции массы любого тела:

$$J = \sum m_i r_i^2 .$$

Установим единицу измерения момента инерции:

$$[J] = [m] \cdot [r^2] = \text{êã} \cdot \text{ì}^2 .$$

Приведем формулы (без выводов) для вычисления моментов инерции простейших тел относительно некоторых осей.

Момент инерции *однородного стержня* относительно оси Z, перпендикулярной к продольной оси стержня, проходящей через его конец (рис. 1.12, *а*):

$J_Z = ml^2/3$, где m — масса стержня; l — длина стержня.

Для однородного стержня относительно оси Z_0 (рис. 1.12, *а*), проходящей через его центр тяжести $\tilde{n}$, момент инерции определяется:

$$J_{Z_0} = ml^2/12 .$$

Для однородного цилиндра (рис. 1.12, *б*) момент инерции равен:

$$J_Z = mD^2/8 \text{ или } J_Z = mR^2/2 ,$$

где m — масса цилиндра; D — диаметр и R – радиус цилиндра.

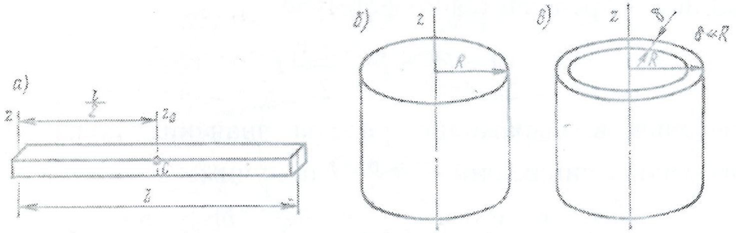

Рисунок 1.12

Для окружности или *тонкого* кольца, если *пренебречь его толщиной*, то есть $\delta << R$ (рис. 1.12, *в*):

$$J_Z = mD^2/4 .$$

Момент инерции относительно параллельных осей:

$$J_\mu = J_{ZC} + mk^2 ,$$

где J_{ZC} – момент инерции тела относительно оси Z, проходящей через его центр масс C, причем оси μ и Z параллельны; k – расстояние между осями.

1.5.10. Закон изменения кинетической энергии

Пусть на материальную точку массой m действует постоянная сила F. В этом случае точка имеет постоянное ускорение $\bar{a} = \bar{F}/m$, а движение ее будет равномерно-ускоренным. Рассмотрим случай, когда направление движения совпадает с направлением силы F (см. рис. 1.10).

Пусть точка под действием силы F переместится из положения C_1 в положение C_2. Если обозначить начальную и конечную скорости точки соответственно через v_1 и v_2, то ускорение движения можно определить по формуле: $a = \frac{v_2 - v_1}{t}$, где t — время движения.

Перемещение точки приложения силы:

$$S = \frac{v_2 + v_1}{2} t .$$

Работа силы F, учитывая, что ее направление совпадает с перемещением, определяется по формуле:

$$A = FS = F\frac{v_2 + v_1}{2}t\ .$$

Подставив в выражение работы значение силы F, по основному закону динамики $(F = ma)$ получим:

$$A = m\frac{v_2 - v_1}{t}\cdot\frac{v_2 + v_1}{2}t = m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}\ .$$

Таким образом, это уравнение показывает, что *работа силы, действующей на материальную точку, равна изменению кинетической энергии точки.*

Для системы материальных точек, например для твердого тела, закон кинетической энергии имеет аналогичный вид:

$$\mathring{A}_2 - \mathring{A}_1 = \sum \grave{A}\ ,$$

то есть, *изменение кинетической энергии системы материальных точек* равно сумме работ сил, действующих на систему.

1.5.11. Основное уравнение динамики для вращательного движения твердого тела

Определим зависимость между приложенными к вращающемуся телу силами $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots, \overline{F_i}, \ldots, \overline{F_n}$ и сообщаемым телу угловым ускорением ε (рисунок 1.13).

Рассмотрим элементарную частицу тела dm и приложим к ней нормальную $dF^n_{\grave{e}\acute{\i}}$ и касательную $dF^\tau_{\grave{e}\acute{\i}}$ составляющие силы инерции.

Если приложить силы инерции ко всем подобным частицам тела, то получим уравновешенную систему сил.

Применим к этой системе уравнения равновесия. Алгебраическую сумму моментов вращения от внешних сил $\overline{F_i}$ относительно оси вращения y обозначим M^e_y.

Нормальные силы инерции пересекают ось вращения и не создают относительно нее момента. Касательные силы инерции создают моменты относительно оси вращения. Плечом касательной силы инерции $F^\tau_{\grave{e}\acute{\i}}$ каждой точки является соответствующий радиус r_i.

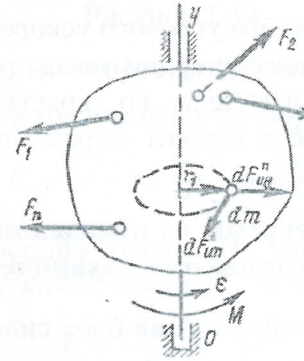

Рисунок 1.13

Направление суммарного момента этих сил противоположно направлению углового ускорения ε и вращающего момента $\grave{I}^{\,a}_{\,\acute{o}}$, так как касательная сила инерции любой точки направлена противоположно ее касательному ускорению. Значение касательной силы инерции точек вращающего тела определяется по формуле:

$$dF^\tau_{\grave{e}\acute{\i}} = dm\cdot a_\tau = dm\cdot r\cdot\varepsilon\ .$$

Составим уравнение моментов относительно оси вращения y:

$$\sum M_{iy} = 0\ ;\quad M - \int dF^\tau_{\grave{e}\acute{\i}}\cdot r = 0\ .$$

Подставив значение $dF^\tau_{\grave{e}\acute{\i}}$, получим:

$$M = \int r^2\varepsilon\cdot dm\ .$$

Вынесем значение углового ускорения ε за знак интеграла как величину, одинаковую для всех точек тела:

$$M = \varepsilon\int r^2 dm\ .$$

Величина $\int r^2 dm$ – это интегральная форма записи момента инерции тела J относительно некоторой оси. Для тела, вращающегося вокруг оси y (рис. 1.13), получим *основное уравнение динамики для вращательного движения твердого тела*:

$$M = \varepsilon J_y\ .$$

Из уравнения следует, что: чем больше момент инерции тела J M следует приложить для сообщения телу определенного углового ускорения ε.

Таким образом, момент инерции массы рассматривается как мера инертности твердого тела во вращательном движении аналогично тому, как масса служит мерой инертности тела при поступательном движении.

1.5.12. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Пример 1.11. Через однородный блок силой тяжести $G_1 = 10$ *кН* и радиусом $r = 0{,}2$ *м* и перекинут трос с двумя грузами: $G_2 = 100$ *кН* и $G_3 = 30$ *кН*. Груз G_2 опускается по вертикали, груз G_3 поднимается по гладкой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 45'$ (рисунок 1.14). Пренебрегая массой троса и сопротивлениями в опорах, определить:

- высоту S, на которую должен опуститься груз G_2, чтобы достичь скорости $v = 3$ *м/с*, если начальная скорость равна нулю;
- ускорение a движения грузов.

Решение. Скорость движения грузов G_2 и G_3 равна по величине линейной скорости точек на окружности блока. Следовательно, угловую скорость блока можно определить по формуле: $\omega = v / r$.

Закон изменения кинетической энергии для рассматриваемой механической системы имеет вид: $E_2 - E_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} A_{Fi}$.

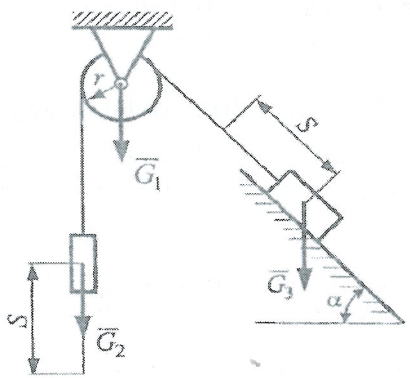

Рисунок 1.14

Так как начальная скорость системы тел равна нулю, то $E_1 = 0$, а величина E_2 определится по формуле:

$$E_2 = \frac{J_1\omega^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} + \frac{m_3 v^3}{2},$$

где $J_1 -$ момент инерции блока. В данной задаче определим величину момента инерции блока как для однородного цилиндра:

$$J_1 = \frac{m_1 r^2}{2} = \frac{G_1 r^2}{2g}.$$

Подставим в уравнение для E_2 значения J_1, ω, $m_2 = G_2 / g$ и $m_3 = G_3 / g$, получим:

$$E_2 = \frac{G_1 r^2 v^2}{2 \cdot 2g \cdot r^2} + \frac{G_2 v^2}{2g} + \frac{G_3 v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{G_1}{2} + G_2 + G_3\right).$$

В рассматриваемой механической системе работу совершают только две силы $-G_2$ и G_3. Величина работы определится по формуле:

$$\sum_{i=1}^{2} A_{Fi} = G_2 S - G_3 S \sin\alpha.$$

Получаем:

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{G_1}{2} + G_2 + G_3\right) = S(G_2 - G_3 \sin\alpha). \quad (1)$$

Решаем данное уравнение относительно S по условию $v = 3$ *м/с*:

$$S = \frac{v^2\left(\frac{G_1}{2} + G_2 + G_3\right)}{2g(G_2 - G_3 \sin\alpha)} = \frac{3^2\left(\frac{10}{2} + 100 + 30\right)}{2 \cdot 9{,}81(100 - 30 \cdot 0{,}707)} = 0{,}787 \text{ м}.$$

Для вычисления ускорения грузов продифференцируем по времени уравнение (1), учитывая, что в скобках стоят выражения, не зависящие от времени.

$$\frac{2v \cdot dv}{2g \cdot dt}\left(\frac{G_1}{2} + G_2 + G_3\right) = \frac{dS}{dt}(G_2 - G_3 \sin\alpha).$$

Учитывая, что $v = \frac{dS}{dt}$; $a = \frac{dv}{dt}$, где $a -$ ускорение грузов G_2 и G_3, находим:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{(G_2 - G_3 \sin\alpha)g}{\frac{G_1}{2} + G_2 + G_3} = \frac{(100 - 30\sin 45^o)9{,}81}{\frac{10}{2} + 100 + 30} = 5{,}73 \ м/с^2.$$