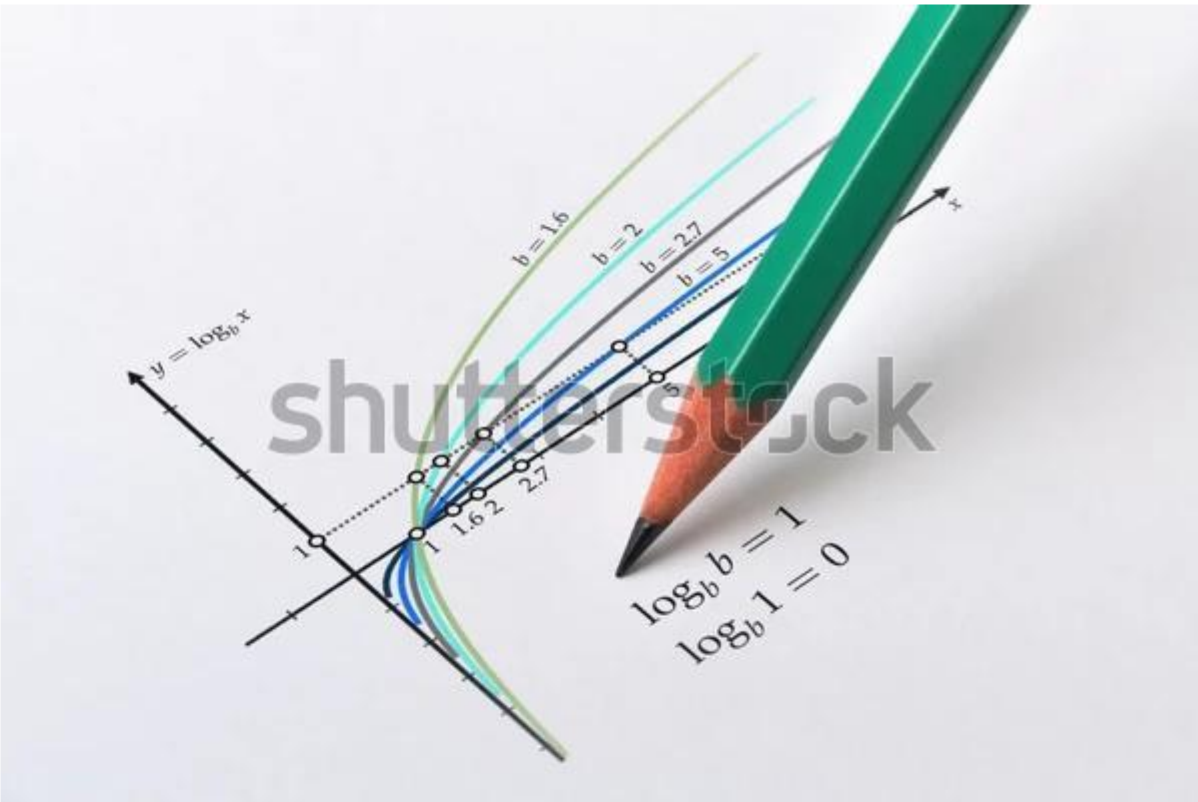
Государственное автономное образовательное учреждение
Новосибирской области
Новосибирский колледж печати и информационных технологий

Составитель И. В. Ворожейкина

Учебно-методическое пособие «Логарифмы. Логарифмические уравнения и неравенства»

для обучающихся по программам подготовки квалифицированных рабочих (служащих) и специалистов среднего звена



Новосибирск, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка

Пособие предназначено для оказания помощи студентам при изучении темы «Логарифмы. Логарифмические уравнения и неравенства».

В пособии содержится теоретический материал, приведен разбор решений типичных заданий, предлагаются задания для самостоятельных работ, практическая и контрольная работы по данной теме.

Задания разработаны таким образом, чтобы можно было осуществить проверку знаний.

Урок 1. Понятие логарифма

1. Теоретический материал

Как называются уравнения и какими способами их можно решить?

$2^x = 8.$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16.$	$2^x = 6.$
Решение: $2^x = 2^3;$ $x = 3.$	Решение: $(2^{-1})^x = 2^4;$ $2^{-x} = 2^4;$ $-x = 4;$ $x = -4.$	???

Для любого уравнения вида, $a^x = b$, где $a > 0, b > 0, a \neq 1$, существует единственный корень и его условились записывать так: $x = \log_a b$.

Например: $2^x = 6$, $x = \log_2 6$.

Определение: ***логарифмом числа b по основанию a*** называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить b, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, т**о есть** $\boldsymbol{\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b}$**.**

Например:

$\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$;

$\log_3 \frac{1}{27} = -3$, так как $3^{-3} = \frac{1}{27}$;

$\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$, так как $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$;

$\log_4 2 = \frac{1}{2}$, так как $4^{\frac{1}{2}} = 2$.

Из определения вытекает основное логарифмическое тождество:

$$\boldsymbol{a^{\log_a x} = b}, \text{ где } a > 0, b > 0, a \neq 1 \ \textbf{.}$$

Например:

1) $2^{\log_2 13} = 13;$

2) $\frac{70}{2^{\log_2 5}} = \frac{70}{5} = 14;$

3) $\frac{7^{\log_7 13}}{52} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4};$

4) $6^{2\log_6 3} = 6^{\log_6 3^2} = 6^{\log_6 9} = 9;$

5) $25^{\log_5 4} = 5^{2\log_5 4} = 5^{\log_5 16} = 16;$

6) $2^{3+\log_2 9} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 9} = 8 \cdot 9 = 72.$

Простейшие свойства логарифмов:

$\boxed{\log_a a = 1}$ $\boxed{\log_a 1 = 0}$ $\boxed{\log_a a^c = c}$

Например:

$\log_2 2 = 1$, так как $2^1 = 2$;

$\log_4 1 = 0$, так как $4^0 = 1$;

$\log_3 9 = 2 \Rightarrow \log_3 3^2 = 2$, так как $3^2 = 9$.

Виды логарифмов: обыкновенные, десятичные, натуральные.

Обыкновенные логарифмы: логарифмы вида $\log_a b$, где $a > 0, b > 0, a \neq 1$.

Например: $\log_2 7$ (читается: логарифм 7 по основанию 2).

Десятичные логарифмы: логарифмы, основания которых равно 10, $\log_{10} b = \lg b$.

Например: $\log_{10} 3 = \lg 3$ (читается: десятичный логарифм 3).

Натуральные логарифмы: логарифмы, основания которых равно e (e$\approx 2{,}7$), $\log_e b = \ln b$.

Например: $\log_e 5 = \ln 5$ (читается: натуральный логарифм 5).

Задания для письменной самостоятельной работы:

1) Вычислить:	
1) $\log_9 81$;	8) $\log_{64} 8$;
2) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$;	9) $7^{\log_7 2}$;
3) $\log_3 1$;	10) $9^{2\log_9 5}$;
4) $\log_5 5$;	11) $3^{2+\log_3 11}$;
5) $\log_{\frac{1}{2}} 4$;	12) $10^{3-\lg 40}$;
6) $\log_4 \frac{1}{4}$;	13) $2^{\log_2 3+\log_2 5} = 3 \cdot 5 = 15$;
7) $\lg 100$;	14) $\frac{5^{\log_5 6}}{48}$
2) Найти *x*:	
1) $\log_5 x = 2$;	5) $\log_x 81 = 4$;
2) $\log_3 x = -1$;	6) $\log_x \frac{1}{16} = 2$;
3) $\log_{\frac{1}{9}} x = -3$;	7) $\log_x \frac{1}{4} = -2$;
4) $\log_{\sqrt{5}} x = 0$;	8) $\log_x 27 = 3$.

Урок 2. Свойства логарифмов

1. Теоретический материал

При $a > 0, b > 0, a \neq 1$ справедливы следующие равенства:

1	$\log_a a = 1;$	6	$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b;$
2	$\log_a 1 = 0;$	7	$\log_a b^n = n \cdot \log_a b;$
3	$\log_a a^c = c;$	8	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b;$
4	$\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c);$	9	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, c \neq 1;$
5	$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c};$	10	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, b \neq 1.$

Важно! Формулы 4 и 5 применяются к выражению, содержащим логарифмы с одинаковыми основаниями; Формулы 9 и 10 позволяют переходить от одного основания логарифмов к другому.

Примеры применения свойств:	
1)	$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \cdot \log_2 2 = 5 \cdot 1 = 5;$
2)	$\log_{16} 2 = \log_{2^4} 2 = \frac{1}{4} \cdot \log_2 2 = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4};$
3)	$\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2 \cdot 3) = \log_6 6 = 1;$
4)	$\log_{12} 4 + \log_{12} 36 = \log_{12}(4 \cdot 36) = \log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = 2 \cdot \log_{12} 12 = 2 \cdot 1 = 2;$
5)	$\log_{225} 3 + \log_{225} 5 = \log_{225}(3 \cdot 15) = \log_{225} 15 = \log_{15^2} 15 = \frac{1}{2} \cdot \log_{15} 15 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2};$
6)	$\log_2 30 - \log_2 15 = \log_2 \frac{30}{15} = \log_2 2 = 1;$
7)	$\log_3 \frac{1}{81} = -\log_3 81 = -\log_3 3^4 = -4 \cdot \log_3 3 = -4 \cdot 1 = -4;$
8)	$\frac{\log_3 16}{\log_3 2} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4;$
9)	$\log_{125} 5 = \frac{1}{\log_5 125} = \frac{1}{\log_5 5^3} = \frac{1}{3 \cdot \log_5 5} = \frac{1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3}.$

Задания для письменной самостоятельной работы:

1) $\log_{18} 2 + \log_{18} 9$;	7) $\log_{0,2} 40 - \log_{0,2} 8$;
2) $\log_4 8 + \log_4 32$;	8) $\log_2 64 - \log_2 4$;
3) $\log_{32} 2 + \log_{32} 4$;	9) $\log_3 162 - \log_3 2 + \log_5 5$;
4) $\lg 40 + \lg 25$;	10) $4 \log_{\frac{1}{2}} 3 - \log_{\frac{1}{2}} 9 - 2 \log_{\frac{1}{2}} 6$;
5) $\log_6 216 - \log_6 36$;	11) $\frac{\lg 100}{\lg \sqrt[6]{10}}$;
6) $\log_3 243 - \log_3 27$;	12) $\frac{\log_{0,2} 125}{\log_{0,2} 5}$.

Урок 3. Практическая работа по теме «Логарифмы и их свойства»

Цель: закрепить умение применять определение логарифма, основное логарифмическое тождество, свойства логарифмов при преобразовании выражений.

Теоретический материал

Определение. Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

$a^{\log_a b} = b$ - основное логарифмическое тождество

Свойства логарифмов

1. $\log_a a = 1;$
2. $\log_a 1 = 0;$
3. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c;$
4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$
5. $\log_a b^n = n \log_a b;$
6. $\log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b;$
7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$

Практическая часть

1 вариант

1. Вычислите:

а) $\log_3 1$; б) $\log_3 9$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 8$; г) $\lg \frac{1}{1000}$;

д) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{128}$; е) $\log_{13} 13$; ж) $\log_{\sqrt{5}} 125$; з) $\log_{16} 2$.

2. Найдите значение выражения, используя основное логарифмическое тождество:

а) $6 \cdot 7^{\log_7 2}$; б) $9^{\log_3 4}$; в) $0{,}2^{2+\log_{0,2} 3}$; г) $(5^{\log_3 7})^{\log_5 3}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\log_6 2 + \log_6 18$;

б) $\log_7 3 - \log_7 \frac{3}{343}$;

в) $\log_3 120 - \log_3 10 - \log_3 4$;

г) $3\log_6 2 - \log_6 2 + 2\log_6 3$;

д) $(\log_2 16) \cdot (\log_6 36)$;

е) $\log_{\sqrt{7}}(49 \cdot \sqrt{7})$;

ж) $\frac{\log_5 27}{\log_5 3}$;

з) $\frac{\log_2 135 - \log_2 20 + 2\log_2 6}{\log_2 3}$;

и) $\sqrt{17}^{\log_{17} 64} + 10^{\log_{\sqrt{10}} 12}$

к) $\log_2 \sqrt[5]{4}$;

л)* $(1 - \log_2 12)(1 - \log_6 12)$;

м)* $\frac{\log_3 21 \cdot \log_7 21}{\log_3 21 + \log_7 21}$.

2 вариант

1. Вычислите:

а) $\log_5 1$; б) $\log_2 8$; в) $\log_{\frac{1}{3}} 27$; г) $\lg \frac{1}{100}$.

д) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{243}$; е) $\log_{15} 15$; ж) $\log_{\sqrt{7}} 343$; з) $\log_{64} 4$.

2. Найдите значение выражения, используя основное логарифмическое тождество:

а) $9 \cdot 7^{\log_7 3}$; б) $4^{\log_2 6}$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2+\log_{\frac{1}{5}} 4}$; г) $(3^{\log_2 3})^{\log_3 2}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\log_6 3 + \log_6 12$;

б) $\log_5 7 - \log_5 \frac{7}{25}$;

в) $\log_6 72 - \log_6 4 - \log_6 3$;

г) $2\log_3 6 - 2\log_3 2 + \log_3 9$;

д) $(\log_2 4) \cdot (\log_3 81)$;

е) $\log_{\sqrt{5}}(125 \cdot \sqrt{5})$;

ж) $\frac{\log_3 16}{\log_3 2}$;

з) $\frac{\log_3 56 + 2\log_3 12 - \log_3 63}{\log_3 2}$;

и) $\sqrt{15}^{\log_{15} 49} + 7^{\log_{\sqrt{7}} 13}$;

к) $\log_2 \sqrt[3]{32}$;

л)* $(1 - \log_5 40)(1 - \log_8 40)$;

м)* $\frac{\log_6 18 \cdot \log_3 18}{\log_6 18 + \log_3 18}$

Критерии оценивания:

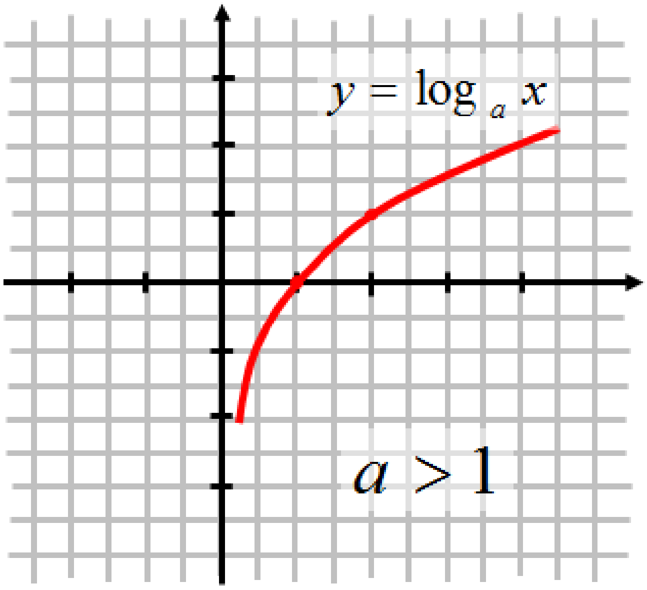
оценка **«3»** ставится за правильно выполненные задания №1 (а-е), №2 (а,б), №3 (а-г); **«4»** - за правильно выполненные задания №1, №2, №3(а-з); **«5»** - за правильно выполненные задания №1, №2, №3 (а-к, на выбор л* или м*).

Урок 4. Логарифмическая функция

Теоретический материал

Логарифмической функцией называется функция вида $y = \log_a x$, где a заданное число, $a > 0$ и $a \neq 1$.

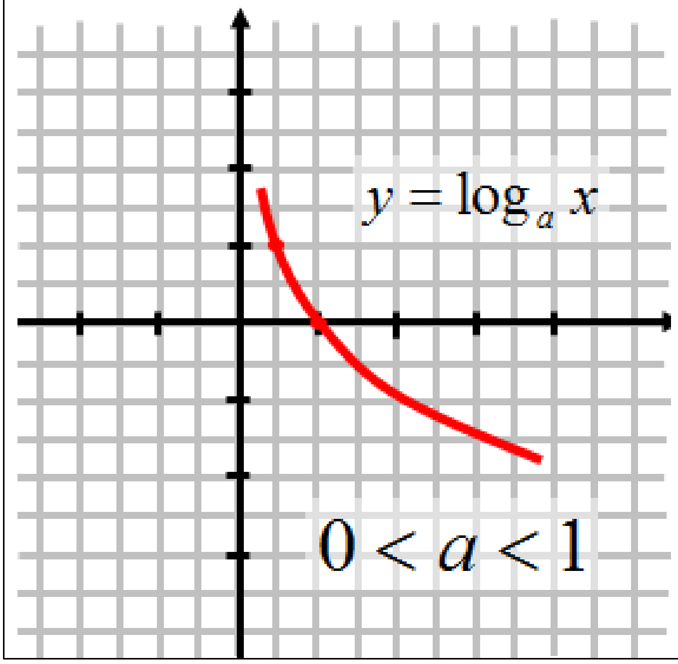
График функции $y = \log_a x$, где $a > 1$



Свойства функции

1. Область определения:
   D(y) = (0; +∞);
2. Множество значений:
   $E(y)$ = (-∞, +∞);
3. Возрастает на промежутке $x \in (0; +\infty)$;
4. Не является ни четной, ни нечетной;
5. Не ограничена сверху, не ограничена снизу (неограниченная);
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
7. Непрерывна;
8. Выпукла вверх;
9. $y>0$ при $x>1$, $y<0$ при $0<x<1$.

График функции $y = \log_a x$, где $0 < a < 1$



Свойства функции

1. Область определения:
   D(y) = (0; +∞);
2. Множество значений:
   E(y) = (-∞, +∞);
3. Убывает на промежутке x∈(0; +∞);
4. Не является ни четной, ни нечетной;
5. Не ограничена сверху, не ограничена снизу (неограниченная);
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
7. Непрерывна;
8. Выпукла вниз;
9. $y>0$ при $0<x<1$, $y<0$ при $x>1$.

Основные свойства логарифмической функции

№	$a > 1$	$0 < a < 1$
1	Область определения функции (0; +∞)	
2	Множество значений функции (0; +∞)	
3	Возрастает на $x \in (0; +\infty)$	Убывает на $x \in (0; +\infty)$
4	Не ограничена сверху, не ограничена снизу	

5	Не имеет ни наибольшего значения, ни наименьшего значения
6	Непрерывна
7	Не является ни четной, ни нечетной

Примеры решения заданий:

1. Найти область определения функции $y = \log_5(x + 7)$.

Решение: область определения функции – это допустимые значения аргумента, то есть это все значения $\boldsymbol{x}$, при которых выражение, задающее функцию, имеет смысл: по определению логарифма $x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7$;

D(y) = (-7; +∞).

2. Укажите возрастающие и убывающие функции:

а) $y = \log_{0,1} x$; б) $y = \log_3 x$; в) $y = \log_e x$; г) $y = \log_{\frac{2}{7}} x$.

Решение: логарифмическая функция $y = \log_a x$ является:

возрастающей при $a > 1$	убывающей при $0 < a < 1$
б) $y = \log_3 x$, так как $a = 3$, $3 > 1$;	а) $y = \log_{0,1} x$, так как $a = 0{,}1$; $0 < 0{,}1 < 1$;
в) $y = \log_e x$, так как $a = e$, $e > 1$ (e ≈ 2,7);	г) $y = \log_{\frac{2}{7}} x$, так как $a = \frac{2}{7}$; $0 < \frac{2}{7} < 1$.

3. Какие точки принадлежат графикам функций:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; 2) $y = \log_2 x$; 3) $y = \log_3(x + 1)$;

а) $(2; 1)$; б) $(8; 2)$; в) $(9; -2)$.

Решение: для того, чтобы определить принадлежность точки графику функции, необходимо подставить координаты точки вместо $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и посмотреть, получается ли верное равенство:

Функция:	Точка:	Решение:
1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$	в) $(9; -2)$	$-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$
2) $y = \log_2 x$	а) $(2; 1)$	$1 = \log_2 2$
3) $y = \log_3(x + 1)$	б) $(8; 2)$	$2 = \log_3(8 + 1)$; $2 = \log_3 9$

4. Сравните числа:

а) $\log_2 5$ и $\log_2 3$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} 6$ и $\log_{\frac{1}{3}} 4$.

Решения:

а) по свойству логарифмической функции $y = \log_a x$, если основание $a > 1$, то функция является возрастающей (при увеличении значения $\boldsymbol{x}$, значения $\boldsymbol{y}$ увеличивается), при сравнении логарифмов сравниваем числа, стоящие под знаком логарифма $5 > 3 \Rightarrow$ с тем же знаком $\log_2 5 > \log_2 3$;

б) по свойству логарифмической функции $y = \log_a x$, если основание $0 < a < 1$, то функция является убывающей (при увеличении значения $\boldsymbol{x}$, значения $\boldsymbol{y}$

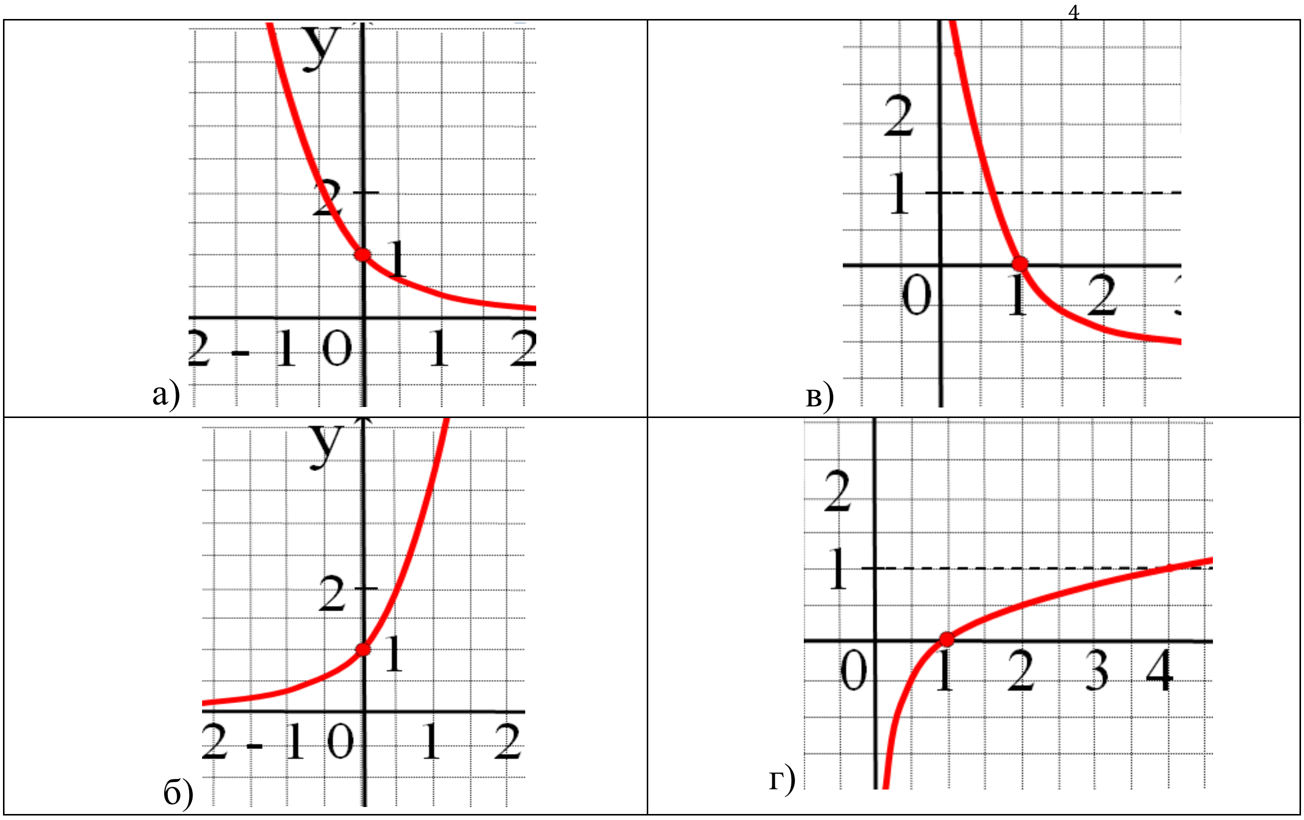
уменьшается), при сравнении логарифмов сравниваем числа, стоящие под знаком логарифма $6 > 4 \Rightarrow$ с противоположным знаком $\log_{\frac{1}{3}} 6 < \log_{\frac{1}{3}} 4$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Найти область определения функции:
   а) $y = \log_{0,3} x$; б) $y = \log_2(x - 1)$; в) $y = \log_3(3 - x)$.

2. Какие из функций являются возрастающими:
   а) $y = \log_5 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; в) $y = \log_{\pi} x$; г) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

3. Укажите рисунок на котором изображен график функции 汴 $= \log_{\frac{1}{4}} x$



4. Какие точки принадлежат графику функции $y = \log_{\frac{1}{5}} x$

а) $(\frac{1}{25}; -2)$; б) $(\frac{1}{5}; -1)$; в) $(5; -1)$.

5. Сравните числа:

а) $\log_3 4$ и $\log_3 6$;

б) $\log_{\frac{1}{4}} 7$ и $\log_{\frac{1}{4}} 9$.

Урок 5-6. Логарифмические уравнения

Логарифмическим уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма.

Имеются три основных метода решения логарифмических уравнений:

1. Метод, заключающийся в преобразовании уравнения к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, а затем к виду $f(x) = g(x)$.
2. По определению логарифма, например $\log_a f(x) = b$, где $a > 0, a \neq 1$, уравнение имеет решение $f(x) = a^b$;
3. Метод введения новой переменной, например $log_a^2 x + \log_a x + b = 0$, заменив $\log_a x = t$, сводиться к квадратному $t^2 + t + b = 0$.

Обращаем ваше внимание! Решив полученное уравнение, применив любой метод решения, следует сделать ***проверку*** *корней, так как по определению логарифм отрицательного числа не существует!*

логарифмическое уравнение	**шаги решения**	**математическая запись**
$\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x)$	Согласно первого метода решения, так как основания логарифмов равны, приравниваем выражения стоящие под его знаком	$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$
	После преобразования получаем квадратное уравнение	$x^2 - x - 12 = 0$; a = 1, b= - 1, c = -12; $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$, D> 0; $x_{1/2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2\cdot1} = \frac{1\pm7}{2}$; $x_1 = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$; $x_2 = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$
	Делаем проверку корней, подставляя в выражения стоящие под	4: $4^2 - 3 \cdot 4 - 5 = \mathbf{-1} < 0$ - посторонний корень; -3: $(-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 5 = \mathbf{13} > \mathbf{0}$; $7 - 2 \cdot (-3) = 13 > 0 -$ корень

	знаком логарифма	-3 удовлетворяет условию
	Ответ:	$x = -3$.
$\log_2(2x-1) = 3$	Согласно второго метода решения, запишем уравнение в виде	$2x - 1 = 2^3$
	Решим получившееся линейное уравнение	$2x - 1 = 8;$ $2x = 8 + 1;$ $2x = 9;$ $x = 4{,}5$
	Делаем проверку	$2 \cdot 4{,}5 - 1 = 8 > 0.$
	Ответ:	$x = 4{,}5.$
$log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$	Согласно третьего метода решения введем новую переменную, заменив $\log_3 x = t$. Тогда уравнение примет вид	$t^2 - t - 2 = 0$
	Решаем квадратное уравнение	$a = 1, b = -1, c = -2$ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) =$ $= 1 + 8 = 9\ ; D > 0;$ $t_{1/2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1};$ $t_1 = \frac{1+3}{2} = 2;$ $t_2 = \frac{1-3}{2} = -1;$
	Делаем обратную замену	$\log_3 x = 2$ *и* $\log_3 x = -1$
	Решаем полученные уравнения по второму методу	$\log_3 x = 2;$ $x = 3^2;$ $x_1 = 9.$ $\log_3 x = -1;$ $x = 3^{-1};$ $x_2 = \frac{1}{3}.$
	Заметим, что проверка в решении данного уравнения не требуется, так как неизвестное стоящее под знаком логарифма принимает только положительное значение	

	Ответ:	$x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{3}.$

Пример 1. Решите уравнение $\lg(x + 3) = 3 + 2\lg 5$.

Решение: $\lg(x + 3) = 3 + 2\lg 5$;

$\lg(x + 3) = 3\lg 10 + 2\lg 5$;

$\lg(x + 3) = \lg 10^3 + \lg 5^2$;

$\lg(x + 3) = \lg 1000 + \lg 25$;

$\lg(x + 3) = \lg 25000$;

$x + 3 = 25000$;

$x = 25000 - 3$;

$x = 24997$.

Проверка: 24997+3=25000>0.

Ответ: $x = 24997$.

Пример 2. Решите уравнение $\log_7(x^2 - 2x - 8) = 1$.

Решение: $\log_7(x^2 - 2x - 8) = 1$;

$x^2 - 2x - 8 = 7^1$;

$x^2 - 2x - 8 - 7 = 0$;

$x^2 - 2x - 15 = 0$;

a = 1, b= - 2, c = -15;

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64$, D> 0;

$x_{1/2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{2+8}{2}$;

$x_1 = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$;

$x_2 = \frac{2-8}{2} = \frac{-6}{2} = -3$.

Проверка:

5: $5^2 - 2 \cdot 5 - 8 = 7 > 0$;

-3: $(-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 8 = 7 > 0$.

Ответ: $x_1 = 5, x_2 = -3$.

Пример 3. Решите уравнение $log^2_{\frac{1}{2}}x - \log_{\frac{1}{2}}x - 6 = 0$.

Решение: $log^2_{\frac{1}{2}}x - \log_{\frac{1}{2}}x - 6 = 0$;

Пусть $\log_{\frac{1}{2}}x = t$;

$t^2 - t - 6 = 0$;

$a = 1, b = -1, c = -6$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) =$

$= 1 + 24 = 25$; $D > 0$;

$t_{1/2} = \dfrac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$;

$t_1 = \dfrac{1+5}{2} = 3$;

$t_2 = \dfrac{1-5}{2} = -2$;

$\log_{\frac{1}{2}}x = 3$; $\log_{\frac{1}{2}}x = -2$;

$x_1 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$; $x_2 = (\frac{1}{2})^{-2} = 2^2 = 4$.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = 4$.

Задания для самостоятельного решения.

1. $\log_2(2x+1) = \log_2 3 + 1$;
2. $\log_7 2 - 1 = -\log_7(5-x)$;
3. $\frac{1}{2}\log_2(3x-2) = 3$;
4. $\log_{0,5}(3x-1) = -3$;
5. $2\log_3 2 - \log_3(x-1) = 1 + \log_3 5$;
6. $\log_7(x-1) = \log_7 2 + \log_7 3$;
7. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) - \log_{\frac{1}{2}}16 = 5$;
8. $\lg(5x+2) = \frac{1}{2}\lg 36 + \lg 2$;
9. $log^2_4 x - 5\log_4 x + 4 = 0$;
10. $lg^2 x = 3 - 2\lg x$.

Урок 7. Логарифмические неравенства

Решение логарифмических неравенств сводится к решению системы неравенств, содержащих область определения функции (ООФ) и решение равносильного неравенства, полученного из логарифмического неравенства, путем его преобразования по известным нам свойствам логарифмических функций.
Важным пунктом при решении логарифмического неравенства является так же монотонность функции:

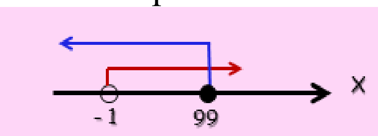
1. Если $\log_a x_1 < \log_a x_2$, при этом а >1 (т.е функция возрастающая - ↑)
   $x_1 < x_2$ (знак остается прежним);

2. Если $\log_a x_1 < \log_a x_2$, при этом 0<а<1 (т.е функция убывающая - ↓)
   $x_1 > x_2$ (знак меняется на противоположный).

Пример:

$\lg(x+1) \le 2$; $\lg(x+1) \le 2\lg 10$; $\lg(x+1) \le \lg 10^2$; $\lg(x+1) \le \lg 10\ 0$, т.к основание а=10, то функция ↑; х+1≤100 х≤100-1 х≤99	ООФ: х+1>0 → х>-1

Отметим решение этих двух неравенств на общей числовой оси:

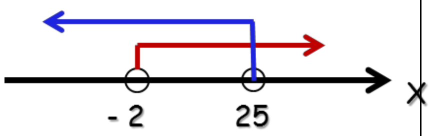


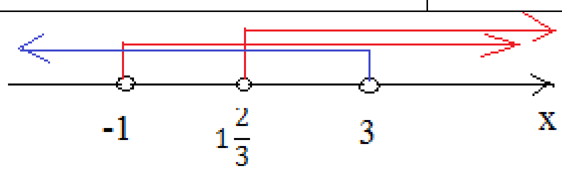
Находим общее решение $x \in (-1; 99]$.
Ответ: $x \in (-1; 99]$.

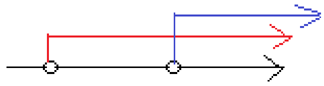
Схема решения логарифмических неравенств:

1. Найти ООФ;
2. Решить логарифмическое неравенство, применяя:
   - свойства логарифмов;
   - монотонность логарифмической функции (возрастание и убывание функций);
3. Выбрать общее решение: ООФ + решение неравенства;
4. Записать ответ.

логарифмическое неравенство	**шаги решения**	**математическая запись**
$\log_3(x+2) < 3$	Прологарифмируем правую часть неравенства по основанию 3 и	$\log_3(x+2) < 3$; $\log_3(x+2) < 3 \cdot \log_3 3$; $\log_3(x+2) < \log_3 27$;

	воспользуемся свойством логарифмов $n \cdot \log_a b = \log_a b^n$	
	Перейдем от логарифмического неравенства к системе неравенств: 1. первое неравенство получено путем потенцирования с учетом монотонности функции (так как функция возрастающая, то при сравнении выражений стоящих под знаком логарифма, знак неравенства не меняется); 2. второе неравенство получено путем нахождения ООФ (выражение, стоящее под знаком логарифма, может принимать только положительное значение) 3. решаем полученную систему неравенств	$\begin{cases} x+2<27, \\ x+2>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<27-2, \\ x>-2; \end{cases}$ $\begin{cases} \text{叭}<25, \\ x>-2; \end{cases}$
	Решение системы неравенств показываем на числовой прямой	
	Ответ: $x \in (-2; 25)$	
$\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$	$\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$	
	Перейдем от логарифмического неравенства к системе неравенств: 1. первое неравенство получено путем потенцирования с учетом монотонности функции (так как функция убывающая, то при сравнении выражений стоящих под знаком логарифма, знак неравенства меняется на	$\begin{cases} 3x-5<x+1, \\ 3x-5>0, \\ x+1>0; \end{cases}$

	противоположный); 2. второе и третье неравенства получены путем нахождения ООФ (выражения, стоящие под знаком логарифма, могут принимать только положительное значение)	
	Решим полученную систему неравенств и решение покажем на числовой прямой	$\begin{cases} 3x - x < 1 + 5, \\ 3x > 5, \\ x > -1; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x < 6, \\ x > \frac{5}{3}, \\ x > -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 3, \\ x > 1\frac{2}{3}, \\ x > -1; \end{cases}$
	 	
	Ответ: $x \in (1\frac{2}{3}; 3)$	
$\lg x > \lg 8 + 1$	Прологарифмируем в правой части неравенства число 1, затем применим свойство логарифмов $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$	$\lg x > \lg 8 + 1;$ $\lg x > \lg 8 + \lg 10;$ $\lg x > \lg 80;$
	Перейдем от логарифмического неравенства к системе неравенств: 1. первое неравенство получено путем потенцирования с учетом монотонности функции (так как функция возрастающая, то при сравнении выражений стоящих под знаком логарифма, знак неравенства не меняется); 2. второе неравенство	$\begin{cases} x > 80, \\ x > 0; \end{cases}$

	получены путем нахождения ООФ (выражение, стоящее под знаком логарифма, может принимать только положительное значение)	
	Решение неравенств покажем на числовой прямой	
	Ответ: $x \in (80; +\infty)$	

Задания для самостоятельной работы:

№	1 вариант	2 вариант
1	$\log_3(x-5) < 2;$	$\log_2(x+1) < 3;$
2	$\log_{\frac{1}{5}}(4-3x) \geq -1;$	$\log_{\frac{1}{2}}(3-5x) \geq -3;$
3	$\log_4(2\,\square + 5) \leq \log_4(x +$	$\log_3(5-4x) \leq \log_3(x-1).$
4	$2\lg 6 - \lg x > 3\lg 2$	$2\lg 0{,}5 + \lg x > \lg 5$

Урок 8. Системы логарифмических уравнений

При решении систем логарифмических уравнений используют те же способы, что и при решении алгебраических систем. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решите систему логарифмических уравнений $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5. \end{cases}$

Решение: решим данную систему методом алгебраического сложения:

Сложим и вычтем уравнения системы:	
$+\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ $2\lg x = 12;$ $\lg x = 6;$ $x = 10^6;$	$-\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ $-2\lg y = 2;$ $\lg y = -1;$ $y = 10^{-1}.$
Осуществим проверку полученных значений (выражение, стоящее под знаком логарифма, может принимать только положительное значение) $10^6 > 0$ и $10^{-1} = \frac{1}{10} > 0$	
Ответ: $x = 10^6$, $y = 10^{-1}$.	

Пример 2. Решите систему логарифмических уравнений $\begin{cases} \log_4(x+y) = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7. \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} \log_4(x+y) = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7; \end{cases}$	Выполним преобразования, применяя свойства логарифмов
$\begin{cases} \log_4(x+y) = 2\log_4 4, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2\log_3 3 + \log_3 7; \end{cases}$	В первом уравнение прологарифмируем число 2 по основанию 4, во втором уравнение прологарифмируем 2 по основанию 3
$\begin{cases} \log_4(x+y) = \log_4 16, \\ \log_3 x + \log_3 y = \log_3 9 + \log_3 7; \end{cases}$	Применим свойство логарифмов $n \cdot \log_a b = \log_a b^n$ в первом и втором уравнениях
$\begin{cases} \log_4(x+y) = \log_4 16, \\ \log_3(x \cdot y) = \log_3(9 \cdot 7); \end{cases}$	Перейдем от системы логарифмических уравнений к системе уравнений путем потенцирования обоих уравнений
$\begin{cases} x + y = 16, \\ x \cdot y = 63; \end{cases}$ $x_1 = 7, y_1 = 9;$ $x_2 = 9, y_2 = 7.$	Решим систему получившихся уравнений

Осуществим проверку полученных значений (выражение, стоящее под знаком логарифма, может принимать только положительное значение) $7 > 0$ и $9 > 0$
Ответ: $x_1 = 7, y_1 = 9;$ $x_2 = 9, y_2 = 7.$

Задания для самостоятельного решения:

1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \lg x - \lg y = 2, \\ x - 10y = 900. \end{cases}$
2. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_4(x+y) = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7. \end{cases}$

Урок 9. Подготовка к контрольной работе «Корни, степени и логарифмы»

Задания	Формулы	
1. Вычислите: 1) $16^{\frac{5}{4}} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}}$; 2) $\log_4 64$; 3) $\lg 8 + \lg 125$.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $a^n : a^m = a^{n-m}$; $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$; $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$; $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$; $a^1 = a$; $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.	$\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$; $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$; $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$; $\log_a b^n = n \log_a b$; $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$; $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.
2. Решите уравнение: 1) $\sqrt[3]{x+8} = 1$; 2) $6^{3x} = 36$; 3) $2^x + 2^{x-3} = 18$; 4) $2 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 4 = 0$; 5) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x - 1) = -2$.	**Формулы**	**Методы решения**
	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ - для решения иррационального уравнения; формулы для решения показательных и логарифмических уравнений смотри в пункте 1.	1. Иррациональные уравнения решают путём возведения обеих частей уравнения в натуральную степень, равную показателю степени корня. 2. $a^x = a^b$, где $a > 0, a \neq 1$ $\Rightarrow x = b$; 3. $a^{x+1} - a^{x-1} = b$, $a^{x-1}(a^2 - 1) = b$; 4. $a^{2x} + a^x + c = 0$, заменив $a^x = t, \Rightarrow t^2 + t + c = 0$. 5. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $\Rightarrow$ $f(x) = g(x)$. 6. $\log_a f(x) = b$, где $a > 0, a \neq 1 \Rightarrow f(x) = a^b$; 7. $log_a^2 x + \log_a x + b = 0$, заменив $\log_a x = t$, сводится к квадратному $t^2 + t + b = 0$.
	Принцип решения	**Методы решения**
3. Решите неравенство: 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{27}$; 2) $\log_5(3x-1) < 1$.	Важным пунктом при решении показательных и логарифмических неравенств является	Методы решения показательных и логарифмических неравенств такие же как и

	монотонность этих функций: 1. при основании $a > 1$ знак неравенства не меняется; 2. при основании $0 < a < 1$ знак неравенства меняется на противоположный.	методы решения уравнений.

Урок 10. Контрольная работа №4
Тема: «Корни, степени и логарифмы»

Вариант №1

1. Вычислите:

1) $9^{\frac{3}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$;

2) $\log_2 16$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$.

2. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-3} = 5$;

2) $4^{2x} = 64$;

3) $5^x + 5^{x+2} = 26$;

4) $3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 54 = 0$;

5) $\log_{\frac{1}{7}}(x+9) = -2$;

6) $\log_2(x+2) + \log_2(x-5) = 3$.

3. Решите неравенство:

1) $3^x \leq 81$;

2) $\log_4(2x+1) \leq 2$;

3) $log_{\frac{1}{2}}(2x+3) < \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ 4^{2x-3y} = 1. \end{cases}$$

Вариант №2

1. Вычислите:

1) $25^{1,5} + (0,25)^{-0,5} - 81^{0,75}$;

2) $\log_{\frac{1}{4}} 64$;

3) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$

2. Решите уравнение:

1) $\sqrt{4+x} = 5$;

2) $3^{4x} = 27$;

3) $3^x + 3^{x+1} = 4$;

4) $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$;

5) $\log_{\frac{1}{2}}(4x-1) = -2$;

6) $\lg(3x-1) = \lg 5 + \lg(x+5)$.

3. Решите неравенство:

1) $2^x < 64$;

2) $\log_5(3x-1) \leq 1$;

3) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5, \\ 3x - y = 20. \end{cases}$$

Критерии оценивания:

оценка **«3»** ставится за правильно выполненные задания №1, №2(1,2,5) и №3(1, 2); **«4»** - задания №1, №2 – любые пять уравнений, №3 – любые два неравенства; **«5»** - за все правильно выполненные задания.