Министерство образования Новосибирской области
Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Новосибирской области
«Новосибирский колледж печати и информационных технологий»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по решению задач
к изучению дисциплины «Техническая механика (раздел Кинематика)»

Новосибирск, 2022

Рекомендованы к публикации Методическим советом колледжа № 1_от 07 сентября 2022 г.

Рассмотрены и рекомендованы предметно-цикловой комиссией профессиональных циклов специальностей «Издательское дело», «Печатное дело», «Производство изделий из бумаги и картона», «Документационное обеспечение управления и архивоведение», и профессии «Печатник плоской печати» государственного автономного профессионального образовательного учреждения Новосибирской области «Новосибирский колледж печати и информационных технологий»

Председатель ПЦК ____________________________________ Олейник Ж.Г.
Организация-разработчик:
Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение Новосибирской области «Новосибирский колледж печати и информационных технологий»
Рецензент: Толочко Александр Иосифович

/Авторы - составители: Ковалева Л.Н.– Новосибирск: ГАПОУ НСО «НКПиИТ», 2022.

Данное методическое указание соответствует рабочей программе дисциплины «Техническая механика», которая нацелена на формирование у студентов базовых знаний. Методическое указание содержит задания по технической механике, раздел кинематика.

Предназначена для студентов обучающихся по специальностям «Печатное дело», «Производство изделий из бумаги и картона».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Создание новых и модернизация существующих машин, приборов, автоматических устройств, технологических комплексов, отвечающих требованиям прочности, точности, надежности, экономичности и т. д., базируется на знаниях из различных фундаментальных и прикладных наук, в том числе, на знаниях из комплекса дисциплин, которые можно объединить под общим названием «механика».

Термин «механика» впервые появляется в сочинениях одного из выдающихся ученых древности - Аристотеля (384 - 322 г. до н. э.) и происходит от греческого слова «mechane», означающего «сооружение», «машина». Возникновение и развитие механики как науки неразрывно связано с историей развития производительных сил общества, уровнем производства и техники на каждом этапе этого развития. Например, в древности, когда запросы производства сводились, главным образом, к удовлетворению задач строительства, развивается учение о простейших машинах (блок, ворот, рычаг, наклонная плоскость) и общее учение о равновесии тел (статика). Начала статики содержатся уже в сочинениях великого ученого древности - Архимеда (287 - 212 г. до н. э.).

В России на развитие первых исследований по механике большое влияние оказали труды М.В. Ломоносова (1711 - 1765), а также Л. Эйлера (1707 - 1783), долгое время жившего в России. Видными отечественными учеными, внесшими свой вклад в различные разделы теоретической механики, являются: М.В. Остроградский (1801 - 1861), П.Л. Чебышев (1821 - 1894), С.В. Ковалевская (1850 - 1891), А.М. Ляпунов (1857 - 1918), И.В. Мещерский (1859 - 1935), А.Н. Крылов (1863-1945), Н.Е. Жуковский (1847 - 1921), С.А. Чаплыгин (1869 - 1942) и многие другие.

С развитием механики как науки в ней появился целый ряд самостоятельных областей, связанных с изучением механики твердых деформируемых тел, жидкостей, газов, тел переменной массы. К этим областям относится теория упругости, теория пластичности, гидромеханика, аэромеханика, газовая динамика и ряд разделов так называемой прикладной механики, например: статика сооружений, сопротивление материалов, гидравлика, а также многие специальные инженерные дисциплины. Однако во всех областях, наряду со специфическими для каждой из них методами и закономерностями, общий метод научных исследований состоит в том, что при рассмотрении того или иного явления в нем выделяют главное, определяющее, а от всего остального, сопутствующего данному явлению, абстрагируются. В результате вместо реального явления или объекта рассматривают некоторую модель и вводят ряд абстрактных понятий, отражающих соответствующие свойства этого объекта (явления).

Исходные понятия и общие принципы механики, а также основы механики твердых тел, излагают в дисциплине, которую называют теоретической механикой, состоящей из трех разделов: статики, кинематики и динамики.

В теоретической механике абстракциями или моделями являются, по существу, все вводимые исходные положения и понятия. Так, например, вместо реальных материальных тел в механике рассматривают такие абстрактные модели, как материальная точка, абсолютно твердое тело, сплошная изменяемая среда и др. В первом случае абстрагируются от учета формы и размеров тела, во втором – его деформацией, в третьем – от молекулярной структуры среды. Только построив механику такого рода моделей, можно применять методы, позволяющие, например, изучать с пригодной для практики точностью равновесие и движение реальных объектов, проверяя в свою очередь эту пригодность практикой.

Статика рассматривает методы преобразования сил в эквивалентные системы и устанавливает условия равновесия сил, приложенных к точкам твердого тела. Кинематика изучает движение тел с геометрической точки зрения, то есть вне связи с их массами и силами, определяющими это движение. Но между действующими на тело силами и движением тела существует глубокая связь. Изучение движения материальных объектов с учетом действующих на них сил является главным содержанием динамики.

Теоретическая механика выступает как теоретическая база для других общетехнических и специальных дисциплин, к которым, в частности, относятся сопротивление материалов, строительная механика, теория машин и механизмов, детали машин, гидравлика и др.

Хорошее усвоение курса требует как глубокого изучения теории, так и приобретения твердых навыков в решении практических задач. Представленные примеры, задачи и контрольные вопросы позволяют студенту не только приобрести знания в областях указанных разделов курса, но сформировать умения и навыки, позволяющие обоснованно выбирать и эксплуатировать различные технические средства опытных и промышленных технологий.

КИНЕМАТИКА. Теоретические аспекты

Кинематика - это раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, без учета сил, определяющих движение.

Основными материальными объектами кинематики, так же как и всей теоретической механики, являются: *материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело*.

Механическое движение — это изменение с течением времени взаимного положения точек и тел в пространстве. Всякое механическое движение происходит в пространстве и во времени. При обычных скоростях можно считать пространство и время абсолютными категориями, которые не зависят от характера движения.

Основная задача кинематики состоит в том, чтобы зная ***закон движения*** точки (тела), определить кинематические величины, которые характеризуют ее (его) движение.

В кинематике используют следующие понятия.

Отрезком или *промежутком времени* называют время, протекающее между двумя фиксированными событиями.

Начальным моментом называют время, с которого начинается отсчет. *Данный момент* времени - граница между двумя смежными промежутками времени.

Чтобы определить положение точки в пространстве, нужно иметь какое-то неподвижное тело или связанную с ним систему координатных осей, которую называют *системой отсчета*. Положение точки в пространстве определяется тремя координатами. Эти координаты изменяются при переходе точки в другое положение.

Чтобы кинематически задать движение точки, надо задать ее положение по отношению к выбранной системе отсчета в каждый заданный момент времени. Существуют три способа задания движения точки: **векторный**, **координатный** и **естественный**.

Линия (кривая, прямая), представляющая собой геометрическое место последовательных положений движущейся точки в данной системе отсчета, называется *траекторией*. Движения точки по виду траекторий можно разделить на прямолинейное и криволинейное движение.

Расстояние — это длина участка траектории, отсчитанная от некоторого начала отсчета. Расстояние — величина алгебраическая; она может быть положительной и отрицательной.

Путь — это количество метров, пройденных точкой от начального до конечного момента времени. Путь всегда положителен.

Скорость - это векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета.

Ускорение - это векторная величина, характеризующая изменение модуля и направления вектора скорости точки во времени.

Уравнения, определяющие положение движущейся точки в зависимости от времени, называются ***уравнениями движения***.

1.1 Способы задания движения точки

1.1.1. Векторный способ. Положение точки *M* определяется радиус-вектором $\bar{r}$, проведенным из некоторого центра *O* (рисунок 1.1). Траекторией точки является *годограф* радиус-вектора (линия, которую описывает точка при своем
движении).

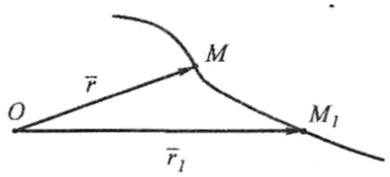


Рисунок 1.1

Движен
ие точки *M* задается уравнением: $\bar{r} = \bar{r}(t)$.

Скорость точки: $\bar{v}_M = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$.

Ускорение точки: $\bar{a}_M = \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$.

Построить вектор можно только в некоторой системе координат.

Векторный способ подразумевает наличие системы координат, но не конкретизирует ее, поэтому им пользуются при выводе теоретических положений кинематики.

1.1.2. Координатный (аналитический) способ. При этом способе задается 3 функции (при движении в пространстве), определяющие три координаты точки в каждый момент времени. Системы координат могут быть разными, например: прямоугольная Декартова, цилиндрическая или сферическая системы координат. Координаты $x, y, z, \rho, \varphi, \theta, r$ являются функциями времени (рисунок 1.2).

В *прямоугольной системе координат* задаются координаты точки *M*, зависящие от времени (рис. 1.2, *а*): $x = x(t); y = y(t); z = z(t) -$ это и есть ***уравнения движения точки***.

Для того чтобы найти уравнение траектории движения точки, из уравнений движения исключают t и находят зависимость $y = f(x)$.

Вектор $\bar{v}_M$ всегда направлен по касательной к траектории в данной точке.

Скорость точки: $v_M = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$,

где $v_x, v_y, v_z -$ проекции скорости на соответствующие оси координат;

$v_x = \dfrac{dX}{dt}, \; v_y = \dfrac{dY}{dt}, \; v_z = \dfrac{dZ}{dt}.$

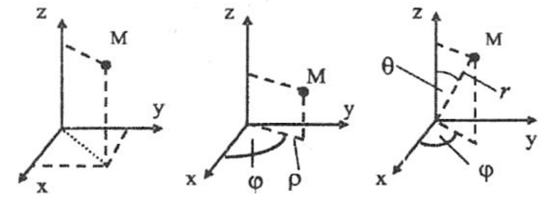
В механике для упрощения записи дифференцирования по времени часто применяют другую форму записи данных выражений:

$v_x = \dot{x}, \; v_y = \dot{y}, \; v_z = \dot{z}.$

Ускорение точки: $a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$ где:

$a_x = \dfrac{d^2X}{dt^2}, \; a_y = \dfrac{d^2Y}{dt^2}, \; a_z = \dfrac{d^2Z}{dt^2};$

или в другой форме записи: $a_x = \ddot{x}, \; a_y = \ddot{y}, \; a_z = \ddot{z}.$



а *б* *в*

Рисунок 1.2

В *цилиндрической системе координат* (рис. 1.2, *б*) для точки *М* задаются: $\rho = \rho(t); \varphi = \varphi(t); z = z(t)$.

В *сферической системе координат* (рис. 1.2, *в*) задаются: $\varphi = \varphi(t); \theta = \theta(t); r = r(t)$.

Если движение задано в какой-то из этих систем координат, то всегда можно перейти к заданию движения в любой из двух других.

1.1.3. Естественный (геометрический) способ. При этом способе задаются: траектории движения $y = f(x)$ точки (графически или аналитически); закон движения точки по траектории $S = S(t)$; начало отсчета по траектории (точка *O*) и положительное направление отсчета.

При естественном способе задания движения точки траекторией может быть как прямая (рисунок 1.3), так и кривая (рисунок 1.4) линии.

Вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения. Модуль вектора скорости равен абсолютному значению производной от дуговой координаты точки по времени.

$$v_M = \frac{dS}{dt}.$$

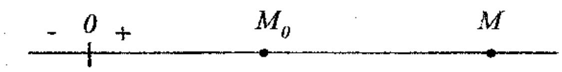


Рисунок 1.3

Интегрируя данное уравнение, получаем естественное уравнение движения: $S = f(t) + S_0$, где $S_0 -$ это постоянная интегрирования, характеризующая начальное положение точки на ее траектории.

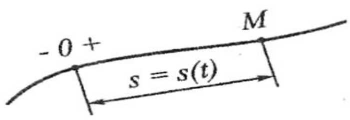


Рисунок 1.4

Ускорение точки в любой момент времени равно сумме двух векторов: $\overline{a}_M = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n$, где:

$\overline{a}_\tau -$ касательное ускорение; характеризует изменение скорости по величине, направлению вдоль касательной к траектории. Оно лежит на одной прямой со скоростью и определяется по формуле:

$$a_\tau = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt};$$

$\overline{a}_n -$ нормальное ускорение; характеризует изменение скорости по направлению, направлено по главной нормали к центру кривизны траектории:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho},$$

где ρ - радиус кривизны траектории. Нормальное ускорение возникает только на криволинейных участках траектории.

Тогда полное ускорение точки:

$a = \sqrt{(a_\tau)^2 + (a_n)^2}$.

Если вектор скорости $\bar{v}$ и вектор $\bar{a}_\tau$ касательного ускорения направлены в одну сторону, то движение точки называется *ускоренным*.

Если вектор скорости $\bar{v}$ и вектор $\bar{a}_\tau$ касательного ускорения направлены в противоположные стороны, то движение точки называется *замедленным*.

1.2 Виды движения точки в зависимости от ускорения

1.2.1. Равномерное прямолинейное движение точки. При этом движении скорость точки $v =$ const, а радиус кривизны траектории $\rho = \infty$. Тогда касательное ускорение $a_\tau = 0$ и нормальное ускорение $a_n = 0$, следовательно, и полное ускорение точки $a = 0$.

1.2.2. Равномерное криволинейное движение точки. При этом движении $a_\tau = 0$, т.к. $v =$ const; $a_n \neq 0$, т.к. радиус кривизны траектории ρ является величиной конечной. Следовательно, полное ускорение точки $a = a_n$.

1.2.3. Неравномерное прямолинейное движение точки. При этом движении $a_\tau \neq 0$, т.к. $v = f(t)$; $a_n = 0$, т.к. радиус кривизны траектории $\rho = \infty$. Следовательно, полное ускорение точки $a = a_\tau$.

1.2.4. Неравномерное криволинейное движение точки. При этом движении $a_\tau \neq 0$, т.к. $v = f(t)$; $a_n \neq 0$, т.к. радиус кривизны траектории $\rho \neq \infty$. Полное ускорение точки $a = \sqrt{(a_\tau)^2 + (a_n)^2}$.

1.3. Равномерно-переменное движение точки

Когда величина касательного ускорения постоянна, движение точки называется *равномерно-переменным*.

Если абсолютная величина скорости увеличивается, то такое движение называется *равноускоренным*.

Если абсолютная величина скорости уменьшается, то такое движение называется *равнозамедленным*.

Скорость при равномерно-переменном движении определяется по формуле:

$$v = a_\tau t + v_0,$$

где v_0 – постоянная интегрирования (начальная скорость точки).

Касательное ускорение при равномерно-переменном движении определяется по формуле:

$$a_\tau = \frac{v - v_0}{t}.$$

Путь от начала отсчета при равномерно-переменном движении определяется по формуле:

$$S = \frac{at^2}{2} + v_0 t + S_0,$$

где S_0 – постоянная интегрирования, характеризующая начальное положение точки.

Если известны скорости, путь определяется по формуле:

$S = \dfrac{v_0 + v}{2} t.$

1.4 Примеры решения задач кинематики точки

1.4.1. Определение кинематических характеристик точки при естественном способе задания движения.

Пример 1.1. Точка *М* движется по заданной криволинейной траектории согласно уравнению (закону): $S = 4t^2 - 2t + 3$, *м*; радиус кривизны траектории $\rho = 6$ *м* в момент времени $t = 1$ *с* (рисунок 1.5).

Определить: скорость и ускорение точки на траектории в данный момент времени.

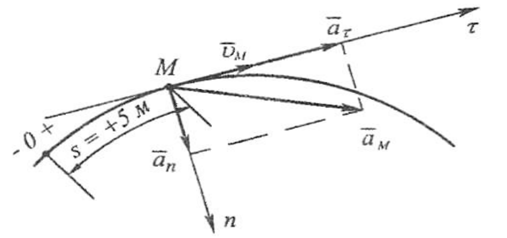


Рисунок 1.5

Решение. Определяем положение точки *М* (пройденный путь) в момент времени $t = 1$ *с* после начала движения от точки 0:

$S = 4 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 5$, *м*.

Изображаем точку *М* с дуговой координатой $S = 5$, *м* на траектории ее движения (рис. 1.5).

Через точку *М* проводим естественные оси: τ (касательную к дуге) и n (главную нормаль дуги). При перемещении точки по траектории эти оси движутся вместе с ней.

Определяем алгебраическую величину скорости точки как первую производную от дуговой координаты S по времени и изображаем вектор скорости $\overline{v}_M$ по касательной к дуге в точке *М* (вдоль оси τ):

$v = \dfrac{dS}{dt} = (4t^2 - 2t + 3)' = 8t - 2$;

при $t = 1$ *с*: $v = 8 \cdot 1 - 2 = 6$, *м/с*.

Так как $v > 0$, то направление вектора скорости совпадает с направлением оси τ.

Определяем ускорение точки *М* как геометрическую сумму двух ускорений: $\overline{a}_M = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n$.

Нормальное ускорение, характеризующее изменение скорости по направлению:

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{6^2}{6} = 6$, *м/с*^{2}.

На схеме вектор $\overline{a}_n$ направляется по главной нормали к центру кривизны траектории.

Касательное ускорение, характеризующее изменение скорости по величине:

$a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2S}{dt^2} = (8t - 2)' = 8$, *м/с*^{2}.

На схеме вектор $\overline{a}_\tau$ совпадает с направлением оси τ, так как его значение

$8 > 0$.

Полное ускорение $\overline{a}_M$ направлено по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\overline{a}_\tau$ и $\overline{a}_n$, как на сторонах, поэтому:

$a_M = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, $м/с^2$.

Вектор скорости и векторы всех ускорений точки M показаны на рисунке 1.5.

Пример 1.2. По дуге окружности (1/4 части дуги) движется точка A из положения A_0 в положение A_2 (рисунок 1.6), согласно уравнению движения $S = \pi \cdot t^2$. Радиус окружности $r = 16$ $м$. Определить скорость точки v, касательное ускорение a_τ, нормальное ускорение a_n и полное ускорение a в положениях 1 и 2.

Решение. Определяем расстояние, которое проходит точка A от положения 0 до положения 1:

$$S_{01} = \frac{2\pi \cdot r}{8} = \frac{2\pi \cdot 16}{8} = 4\pi.$$

Соответственно, расстояние, которое проходит точка A от положения 0 до положения 2, равно:

$$S_{02} = \frac{2\pi \cdot r}{4} = \frac{2\pi \cdot 16}{4} = 8\pi.$$

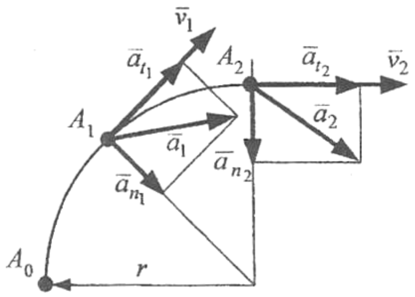


Рисунок 1.6

Время, за которое точка A достигнет положения 1:

$$t_1 = \sqrt{\frac{S_{01}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\pi}} = 2 \ с.$$

Время, за которое точка A пройдет путь S_{02}:

$$t_2 = \sqrt{\frac{S_{02}}{\pi}} = \sqrt{\frac{8\pi}{\pi}} = 2{,}8 \, с.$$

Далее, определяем скорость движения точки A. Для этого дифференцируем уравнение движения $S = \pi \cdot t^2$.

$$v = \frac{dS}{dt} = (\pi \cdot t^2)' = 2\pi \cdot t, \ м/с.$$

Тогда скорость движения точки A в положениях 1 и 2 соответственно будут равны:

$v_1 = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 12{,}56 \, м/с$;

$v_2 = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}8 = 17{,}58 \, м/с$.

Определяем касательное ускорение точки A в положении 1 путем дифференцирования уравнения скорости:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = (2\pi \cdot t)' = 2\pi = 6{,}28 \text{ м/с}^2 = const.$$

Касательное ускорение a_τ не зависит от времени, поэтому касательное ускорение точки *А* в положении 2 также будет равно $6{,}28$ *м/с*².

Определяем нормальное ускорение точки *А* в положении 1:

$$a_{n1} = \frac{v_1^2}{\rho} = \frac{v_1^2}{r} = \frac{(12{,}56)^2}{16} = 9{,}86 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение точки *А* в положении 2:

$$a_{n2} = \frac{v_2^2}{\rho} = \frac{v_2^2}{r} = \frac{(17{,}58)^2}{16} = 19{,}32 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение точки *А* в положениях 1 и 2 соответственно:

$$a_1 = \sqrt{a_\tau^2 + a_{n1}^2} = \sqrt{6{,}28^2 + 9{,}86^2} = 11{,}7 \text{ м/с}^2;$$

$$a_2 = \sqrt{a_\tau^2 + a_{n2}^2} = \sqrt{6{,}28^2 + 19{,}32^2} = 20{,}32 \text{ м/с}^2.$$

1.4.2. Определение кинематических характеристик точки при координатном способе задания движения.

Пример 1.3.

Дано: точка *М* движется в плоскости *xOy* согласно уравнениям:

$$\begin{cases} x = 2t; \\ y = 4t^2 - 1. \end{cases} \qquad (*)$$

Величины x и y заданы в метрах, t - в секундах.

Определить: установить вид траектории точки *М*, а для момента времени $t = 1$ *с* найти положение точки на траектории, ее скорость, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Решение. Заданные уравнения движения (*) можно рассматривать как параметрические уравнения точки *М*. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме в виде $y = f(x)$, исключим время t из этих уравнений. Для этого выразим t через x и подставим это выражение в уравнение координаты y:

$$t = \frac{x}{2}; \quad y = 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1.$$

Полученное уравнение $y = x^2 - 1$ является уравнением параболы с вершиной в точке с координатами $(0;-1)$; ветви параболы направлены вверх. В выбранной системе отсчета *xOy* вычерчиваем траекторию точки *М*, рисунок 1.7.

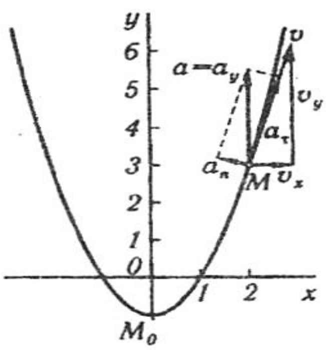


Рисунок 1.7

Определяем координаты точки в данный момент времени после начала движения, подставляя значение $t = 1$, c в уравнения движения:

$x = 2t = 2 \cdot 1 = 2$, $м$;

$y = 4t^2 - 1 = 4 \cdot 1^2 - 1 = 3$, $м$.

Таким образом, получаем M (+2; +3), $м$, изображаем точку M на траектории (рис. 1.7) и вычисляем значение скорости точки по формуле:

$v_M = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$

где v_x и v_y - проекции вектора скорости на оси x и y (при $t = 1$, c);

$$v_x = \frac{dX}{dt} = (2t)' = 2, \ м/с;$$

$$v_y = \frac{dY}{dt} = (4t^2 - 1)' = 8t = 8, \ м/с.$$

$$v_M = \sqrt{2^2 + 8^2} \approx 8{,}25 \ м/с.$$

Вектор $\bar{v}_M$ направлен по касательной к траектории в точке M.

Вычисляем модуль ускорения точки M по формуле:

$a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$

где a_x и a_y - проекции ускорения на соответствующие оси;

$$a_x = \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = (2)' = 0;$$

$$a_y = \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = (8t)' = 8, \ м/с^2;$$

$$a_M = \sqrt{0 + 8^2} = 8, \ м/с^2.$$

При движении точки в плоскости xOy модуль касательного ускорения точки равен:

$$a_\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \left|\bar{v}\,\frac{\bar{a}}{v}\right| = \left|\frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}\right|,$$

где dv/dt выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости v_M. При этом: знак «плюс» при dv/dt означает, что движение точки ускоренное и направления $\bar{a}_\tau$ и $\bar{v}_M$ совпадают; знак «минус» означает, что движение точки замедленное, а векторы $\bar{a}_\tau$ и $\bar{v}_M$ направлены в противоположные стороны.

Получаем:

$$a_\tau = \left|\bar{v}\,\frac{\bar{a}}{v}\right| = \left|(v_x a_x + v_y a_y)/v\right| = \left|(2 \cdot 0 + 8 \cdot 8)/8{,}25\right| \approx 7{,}76 \ м/с^2,$$

то есть движение точки M ускоренное.

Модуль нормального ускорения точки:

$a_n = v^2/\rho$.

Если радиус ρ кривизны траектории в рассматриваемой точке неизвестен, то модуль нормального ускорения a_n можно определить по формуле:

$$a_n = \frac{\bar{v} \cdot \bar{a}}{v}.$$

При движении точки в *плоскости* эта формула принимает вид:

$$a_n = \left|(v_x a_y - v_y a_x)/v_M\right| = \left|(2 \cdot 8 - 8 \cdot 0)/8{,}25\right| = 1{,}94 \ м/с^2.$$

Модуль нормального ускорения a_n можно определить и по другой формуле:

$a_n = \sqrt{a_M^2 - a_\tau^2}$.

После того, как определено численное значение нормального ускорения

a_n, определяем радиус ρ кривизны траектории в рассматриваемой точке из выражения:

$\rho = v_M^2 / a_n = 8{,}25^2 / 1{,}94 = 35{,}08$ *м*.

На рис. 1.7 показано положение точки *M* в заданный момент времени. Вектор скорости $\bar{v}$ строим в некотором масштабе по составляющим v_x и v_y. Этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор ускорения $\bar{a}$ строим в некотором масштабе по составляющим a_τ и a_n.

Пример 1.4.

Дано: уравнения движения точки в плоскости *xOy* имеют вид

$x = -2\cos(\pi t/4) + 3;$

$y = 2\sin(\pi t/8) - 1$,

где x, $y-$ в *сантиметрах*; $t-$ в *секундах*.

Определить: установить уравнение траектории точки; найти для момента времени $t_1 = 1$ *с* скорость и ускорение точки, а также его составляющие (касательное и нормальное ускорения); найти радиус кривизны траектории в точке при $t = 1$*с*.

Решение. Запишем заданные уравнения движения точки в виде выражений для соответствующих тригонометрических функций:

$\cos(\pi t/4) = (3 - x)/2$;

$\sin(\pi t/8) = (y+1)/2$.

Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. При этом, поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем известную из тригонометрии формулу вида:

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;

Для тригонометрической функции в уравнении движения точки относительно x будем иметь:

$\cos(\pi t/4) = 1 - 2\sin^2(\pi t/8)$.

Следовательно, можно записать:

$(3 - x)/2 = 1 - 2[(y+1)/2]^2$.

Анализируя полученное уравнение, приходим к выводу, что наиболее удобной формой записи уравнения траектории движения точки является функция вида $x = f(y)$.

Таким образом, окончательно записываем уравнение траектории движения точки в виде функции

$x = (y+1)^2 + 1$.

В системе координат *xOy* строим график траектории движения точки: ($y = 0$, $x = 2$); ($y = 1$, $x = 5$); ($y = -1$, $x = 1$); ($y = -2$, $x = 2$); ($y = -3$, $x = 5$); *и т. д.* , рисунок 2.8.

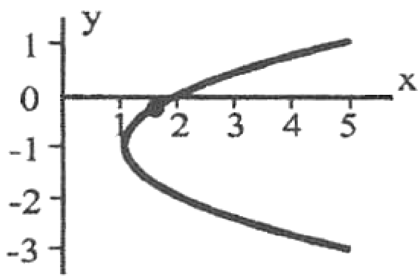


Рисунок 1.8

Скорость точки найдем по ее проекциям на оси координат:

$v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\pi}{2}\sin(\pi t/4)$; при $t = 1$ с: $v_x = 1{,}11$ см/с;

$v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\pi}{4}\cos(\pi t/8)$; при $t = 1$ с: $v_y = 0{,}73$ см/с;

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1{,}11^2 + 0{,}73^2} = 1{,}33$ см/с.

Аналогично определяем ускорение точки:

$a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{\pi^2}{8}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)$; при $t = 1$ с: $a_x = 0{,}87$ см/с^2;

$a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{\pi^2}{32}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}t\right)$; при $t = 1$ с: $a_y = -0{,}12$ см/с^2;

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0{,}87^2 + (-0{,}12)^2} = 0{,}88$ см/с^2.

Касательное ускорение точки найдем, дифференцируя по времени равенство $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Получаем:

$a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{v_x a_x + v_y a_y}{v} = \dfrac{1{,}11 \cdot 0{,}87 + 0{,}73 \cdot (-0{,}12)}{1{,}33} = 0{,}66$ см/с^2.

Нормальное ускорение точки:

$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{0{,}88^2 - 0{,}66^2} = 0{,}58$ см/с^2 (при $t = 1$ с).

Определим координаты точки при $t = 1$ с. Из заданных уравнений движения точки следует, что:

$x = 3 - 2\cos(\pi t/4) = 3 - 2\cos(\pi/4) = 1{,}6$ см;

$y = -1 + 2\sin(\pi t/8) = -1 + 2\sin(\pi/8) = -0{,}23$ см.

Отмечаем на графике траектории движения (рисунок 1.8) точку, имеющую координаты ($+1{,}6$; $-0{,}23$). Радиус кривизны траектории в данной точке:

$\rho = \dfrac{v^2}{a_n} = \dfrac{1{,}33^2}{0{,}58} = 3{,}05$ см.

Если необходимо построить векторы скоростей и ускорений точки, то следует учесть:

- вектор скорости $\bar{v}$ направлен по касательной к траектории в данной точке вправо и вверх, так как $v = 1{,}33 > 0$;

- направление вектора $\bar{a}_\tau$ совпадает с направлением вектора $\bar{v}$, так как a_τ > 0 (движение ускоренное);

- вектор $\bar{a}_n$ направлен перпендикулярно касательной к траектории движения точки (вправо вниз).

- векторы $\bar{a}_x$ и $\bar{a}_y$ направлены параллельно соответствующим осям координат.

1.5 Простейшие движения твердого тела

В зависимости от способов задания движения тела, то есть от вида уравнений, однозначно определяющих положение тела в выбранной системе отсчета в любой момент времени, различают два вида простейших движений твердых тел: *поступательное* и *вращательное*.

1.5.1. Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором всякая прямая, проведенная в этом теле, остается параллельной своему начальному положению. Все точки тела в данный момент имеют геометрически равные скорости и ускорения, траектории всех точек тела одинаковы, но параллельно смещены.

Закон движения задается законом движения какой-либо точки, то есть, при изучении поступательного движения твердого тела достаточно изучить движение хотя бы одной его точки, а для этого можно использовать теорию, полученную в кинематике точки.

Уравнение равномерного поступательного движения:

$S = S_0 + vt$,

где S – дуговая координата центра тяжести «*c*» твердого тела.

Уравнения поступательного движения твердого тела представляют собой уравнения движения одной его точки - центра тяжести «*c*» и могут быть заданы тремя способами:

$\bar{z}_c = \bar{z}_c(t)$ – векторный.

$S_c = S_c(t)$ – естественный;

$$\begin{cases} x_c = f_1(t) \\ y_c = f_2(t) \\ z_c = f_3(t) \end{cases}$$ – координатный;

Скорость и ускорения любой точки тела определяются из уравнений движения так же, как в кинематике изолированной точки.

1.5.2. Вращательным движением (или вращением) называется такое движение твердого тела, при котором имеются две точки, остающиеся все время неподвижными. Линия, проходящая через эти две точки, называется осью вращения. Все точки, лежащие на оси вращения, неподвижны. Траекторией движения любой точки вращающегося тела является окружность с центром на оси вращения.

Положение вращающегося тела можно задать с помощью угла φ - угол поворота твердого тела вокруг оси (рисунок 1.9).

Угол φ положителен, если для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси вращения, поворот виден происходящим против часовой стрелки (на рис. 1.9 сверху вниз).

Для задания вращения надо задать функцию, описывающую изменение угла φ во времени. Уравнение (закон) вращательного движения:

$\varphi = f(t)$.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения являются угловая скорость ω (*рад*/*сек*; 1/*с*; c^{-1}) и угловое ускорение ε

($рад/сек^2$; $1/c^2$; c^{-2}). Эти величины вводятся по аналогии с понятиями скорости и ускорения точки.

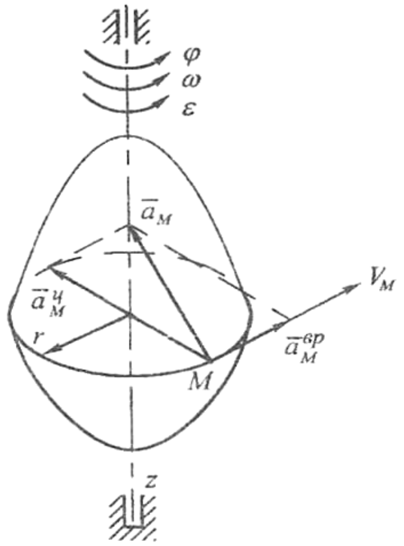


Рисунок 1.9

Угловая скорость вращательного движения тела равна:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Когда $\omega = const$, то имеет место *равномерное* вращение. Уравнение равномерного вращения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ - постоянная интегрирования, характеризующая начальное положение тела.

Когда $\omega \neq const$, имеет место *неравномерное* вращение.

Изменение угловой скорости в единицу времени определяется угловым ускорением ε, которое может определяться в виде:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Если тело вращается вокруг оси с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = const$, то происходит равнопеременное вращение.

Уравнения равнопеременного вращения:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2};$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Из уравнения относительно ω видно, что если ε и ω_0 имеют одинаковые знаки, то ω по модулю возрастает с течением времени. В этом случае вращение называется равноускоренным. Если $\varepsilon = 0$, то вращение называется равномерным.

В формуле для φ обычно полагают, что $\varphi_0 = 0$, так как начальный угол поворота φ_0 зависит от выбора начала отсчета.

В технике часто угловая скорость задается в оборотах в минуту. В этом случае она называется частотой вращения и обозначается буквой n.

Связь между величинами ω и n (*об/мин*) имеет вид:

$\omega = \pi \cdot n / 30$; или $n = 30\omega / \pi$, где $n -$ *об/мин*; $\omega -$ *рад/сек*; $\pi -$ *рад*.

Линейная (вращательная) скорость некоторой точки *M* твердого тела (рис. 1.9):

$v_M = \omega \cdot r$; $(\overline{V} = \overline{\omega} \times \hat{r})$.

Вектор $\overline{V}$ направлен по касательной к окружности в сторону ω .

Ускорение точки *M* раскладывается на тангенциальную и нормальную составляющие:

$\overline{a}_M = \overline{a}_M^{\tau} + \overline{a}_M^{n}$,

где $\overline{a}_M^{\tau}$ - тангенциальное (или вращательное $\overline{a}_M^{âð}$) ускорение точки (направлено по касательной к окружности в сторону ε):

$a_M^{\tau} = \varepsilon \cdot r$;

$\overline{a}_M^{n}$ - нормальное (или центростремительное $\overline{a}_M^{ö}$) ускорение (направлено к центру окружности):

$a_M^{n} = \omega^2 r$.

Полное ускорение:

$a_M = \sqrt{(a_M^{\tau})^2 + (a_M^{n})^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

1.5.3. Определение кинематических характеристик при поступательном и вращательном движениях тел.

Пример 1.5. Груз 1 подвешен на нерастяжимом тросе, намотанном на барабан (рисунок 1.10). Барабан радиусом $r_2 = 0{,}2$ *м* жестко скреплен с зубчатым колесом радиусом $R_2 = 0{,}3$ *м* и имеет общую с ним неподвижную ось вращения O_1 . Зубчатое колесо 2 находится в зацеплении с шестерней 3 радиусом $r_3 = 0{,}15$ *м*. Найти скорость и ускорение точки M ; угловое ускорение ε_3 в момент $t = 1{,}5$ *с*, если груз 1 движется по закону: $x = 1 + 0{,}4t^2$, *м*.

Решение. На основе закона движения груза найдем его скорость и ускорение в прямолинейном поступательном движении:

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = (1 + 0{,}4t^2)' = 0{,}8t = 0{,}8 \cdot 1{,}5 = 1{,}2 \text{ м/с};$$

$$a_1 = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_1}{dt} = (0{,}8t)' = 0{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Векторы $\overline{v}_1$ и $\overline{a}_1$ направлены вниз по направлению движения груза 1.

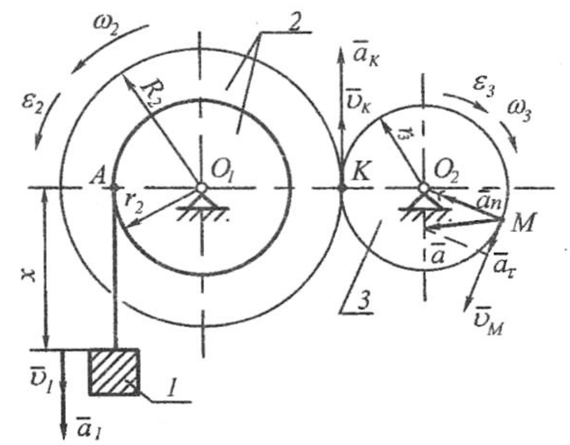


Рисунок 1.10

1 - груз; 2 - барабан и зубчатое колесо, скрепленные жестко; 3 - шестерня

Так как трос нерастяжим, то все его точки имеют скорости и ускорения, равные скорости и ускорению груза 1. Следовательно, и точки обода барабана имеют те же скорость и ускорение, в частности:

$v_A = v_1$; $a_A = a_1$.

При опускании груза 1 барабан и зубчатое колесо (2) вращаются вокруг оси $\hat{I}_1$ с угловой скоростью ω_2 и с угловым ускорением ε_2.

Скорость точек обода барабана равна:

$v_A = \omega_2 r_2$;

откуда получаем:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{1{,}2}{0{,}2} = 6 \ с^{-1}.$$

Ускорение точек обода барабана равно: $a_A = \varepsilon_2 r_2$;

откуда:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_A}{r_2} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4 \ с^{-2}.$$

Если два тела в процессе движения касаются друг друга, а в точке их контакта отсутствует проскальзывание, то точки контакта имеют одинаковые скорости и ускорения. Поэтому линейные скорости и ускорения точки *К* зубчатого колеса (2) и точки *К* шестерни (3) равны.

Определим угловую скорость ω_3 и угловое ускорение ε_3.

При вращении зубчатого колеса 2 с угловой скоростью ω_2 шестерня 3 будет вращаться в противоположную сторону вокруг оси $\hat{I}_2$ с угловой скоростью ω_3 и с угловым ускорением ε_3. При этом линейная скорость точки *К* может быть представлена в виде двух вариантов:

$v_K = \omega_2 R_2$; или $v_K = \omega_3 r_3$.

Таким образом, получаем:

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{r_3} = 6 \cdot \frac{0{,}3}{0{,}15} = 12 \ с^{-1}.$$

Аналогично, линейное ускорение точки *К*:

$a_K = \varepsilon_2 R_2$ или $a_K = \varepsilon_3 r_3$.

Откуда получаем:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \frac{R_2}{r_3} = 4 \cdot \frac{0{,}3}{0{,}15} = 8 \ с^{-2}.$$

Определим линейные скорость и ускорение точки *М* шестерни *3*.

Линейная скорость точки *М*:

$v_M = \omega_3 r_3 = 12 \cdot 0{,}15 = 1{,}8$ *м/с*.

Касательное ускорение точки *М*:

$a_M^\tau = \varepsilon_3 r_3 = 8 \cdot 0{,}15 = 1{,}2$ *м/с*^{2}.

Нормальное ускорение a_M^n точки *М* всегда направлено к оси вращения, а его модуль равен:

$a_M^n = \omega_3^2 r_3 = 12^2 \cdot 0{,}15 = 21{,}6$ м/с^2.

Модуль полного ускорения точки *М* определяем по составляющим линейного ускорения:

$$a_M = \sqrt{(a_M^\tau)^2 + (a_M^n)^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 21{,}6^2} = 21{,}63 \ м/с^2.$$

Пример 1.6. Схема механизма показана на рисунке 1.11. Движение груза 1 от точки 0 в направлении оси x описывается уравнением вида:

$x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$,

где c_1, c_2, c_3 – некоторые постоянные; t – время, c.

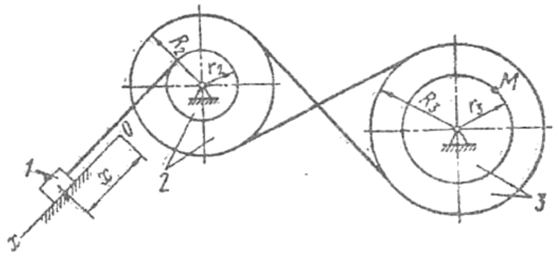


Рисунок 1.11

В начальный момент времени $t = 0$ координата груза 1 равна $x = x_0$, а его скорость $v = v_0$; в момент времени $t = t_2$ координата груза равна $x = x_2$.

Определить коэффициенты c_0, c_1, и c_2, при которых осуществляется требуемое движение груза 1. Определить также в момент времени $t = t_1$ скорости и ускорения груза 1 и точки M.

Исходные данные для расчетов:

$r_2 = 25$ *см*, $R_2 = 50$ *см*, $r_3 = 40$ *см*, $R_3 = 65$ *см*,
$x_0 = 14$ *см*, $x_2 = 168$ *см*, $v_0 = 5$ *см/с*, $t_1 = 1$ *с*, $t_2 = 2$ *с*.

Решение. Скорость движения груза 1:

$$v = \frac{dx}{dt} = c_1 + 2c_2 t.$$

Таким образом, коэффициенты c_0, c_1 и c_2 в уравнении движения груза 1 могут быть определены из граничных условий.

При $t = 0$: $\Rightarrow$ $x = x_0 = 14$ *см*, $v_0 = 5$ *см/с*;

из уравнения движения получаем:

$c_0 = 14$ *см*;

из уравнения для скорости движения груза получаем:

$c_1 = 5$ *см/с*.

При $t_2 = 2$ *с*: $\Rightarrow$ $x_2 = 168$ *см*;

из уравнения движения получаем:

$$168 = 14 + 5 \cdot 2 + c_2 2^2;$$

$$c_2 = \frac{168 - 14 - 10}{4} = 36 \text{ см/с}^2.$$

Таким образом, уравнение движения груза 1 принимает вид:

$x = 14 + 5t + 36t^2$ *см*.

Уравнение для скорости груза 1 записывается в виде:

$v = \dot{x} = 5 + 72t$, *см/с*;

при $t = 1$ *с*, $v = 77$ *см/с*.

Ускорение груза 1:

$a = \dot{v} = (5 + 72t)'$, *см/с*^{2};

при $t = 1$ *с*, $a = 72$ *см/с*^{2}.

Для определения угловых скорости и ускорения колеса 3, а также линейных и угловых скоростей и ускорений точки M запишем уравнения, которые связывают скорость v движения груза 1 и угловые скорости вращения колес ω_2 и ω_3.

В соответствии со схемой механизма (рисунки 1.11 и 1.12) можно записать: $v = r_2\omega_2$, то есть $\omega_2 = \dfrac{v}{r_2}$. При этом: $R_2\omega_2 = R_3\omega_3$.

Таким образом:

$$\omega_3 = \frac{R_2}{R_3}\omega_2 = \frac{vR_2}{r_2R_3}, \ рад/с.$$

После подстановки в данное выражение для ω, формулы $v = 5 + 72t$, численных значений r_2, R_2, R_3 получим:

$$\omega_3 = \frac{(5+72t)R_2}{r_3R_3} = \frac{(5+72t)50}{25\cdot 65} = 0{,}154 + 2{,}215t, \ рад/с;$$

при $t = 1с$, $\omega_3 = 2{,}37$ $рад/с$.

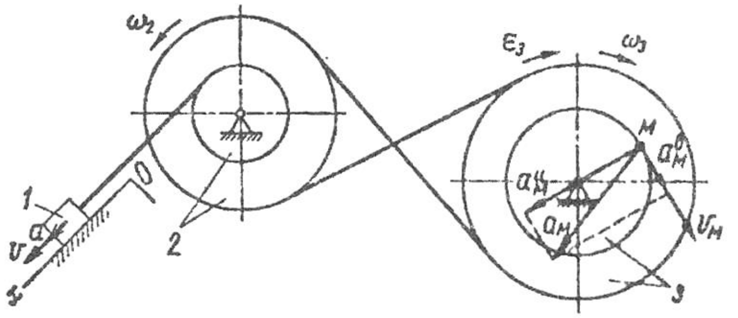


Рисунок 1.12

Угловое ускорение колеса 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = (0{,}154 + 2{,}215t)' = 2{,}215 \ рад/с^2.$$

Определяем линейную скорость точки M; ее тангенциальное (вращательное) ускорение, а также нормальное (центростремительное) и полное ускорения для заданного момента времени $t = 1$ $с$:

$$v_M = \omega_3 r_3 = 2{,}37\cdot 40 = 94{,}8 \ см/с;$$

$$a_M^\tau = \varepsilon_3 r_3 = 2{,}215\cdot 40 = 88{,}6 \ см/с^2;$$

$$a_M^n = \omega_3^2 r_3 = 2{,}37^2\cdot 40 = 224{,}68 \ см/с^2;$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = \sqrt{224{,}68^2 + 88{,}6^2} = 241{,}52 \ см/с^2.$$

Скорости и ускорения груза 1 и точки M показаны на рисунке 1.12.

Вопросы для самопроверки и контроля

1. Что называется механическим движением?
2. Что называется траекторией движения точки?
3. Как определяется траектория точки при координатном способе задания движения?

4. Что называется расстоянием?
5. Что называется пройденным путем?
6. Что такое скорость точки? Единицы измерения скорости.
7. Как направлен вектор скорости по отношению к траектории?
8. Как вычисляется скорость точки при естественном и координатном способах задания ее движения?
9. По какой формуле определяется скорость равномерного движения?
10. Как определяется скорость неравномерного движения?
11. Что такое ускорение? Единицы измерения ускорения точки.
12. Из каких составляющих состоит полное ускорение точки?
13. Что называется касательным ускорением точки?
14. На каких участках траектории возникает касательное ускорение и как направлен вектор касательного ускорения точки?
15. Что называется нормальным ускорением точки?
16. На каких участках траектории возникает нормальное ускорение и как направлен вектор нормального ускорения точки?
17. В чем состоит физический смысл касательного и нормального ускорений точки?
18. Как направлен по отношению к траектории вектор полного ускорения точки?
19. Как определить ускорение движения точки при естественном и координатном способах задания ее движения?
20. Какие виды простейших движений твердого тела вы знаете?
21. Что называется поступательным движением?
22. Что можно сказать о траекториях различных точек тела при его поступательном движении? скоростях и ускорениях различных точек?
23. Как определить скорость и ускорение тела при его поступательном движении?
24. Какое движение тела называется вращательным?
25. Что такое угловая скорость и угловое ускорение тела, единицы их измерения?
26. Что такое частота вращения тела, единицы ее измерения и взаимосвязь с угловой скоростью?
27. Формулы для определения линейных скорости и ускорений точки вращающегося тела; направление скорости и ускорений.
28. Какое движение называется ускоренным, а какое замедленным?
29. Какое движение называется равномерным прямолинейным?
30. Какое движение называется равномерным криволинейным?
31. Какое движение называется неравномерным прямолинейным?
32. Какое движение называется неравномерным криволинейным?
33. Какое движение называется равномерно-переменным?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мещерский, И. В. Задачи по теоретической механике / И. В. Мещерский. - СПБ.: Лань, 2018. - 349 с.

2. Сурин, В. М. Прикладная механика: учеб. Пособие /В. М. Сурин. - 2-е изд., испр. - Минск: Новое знание, 2016. - 387с.

3. Эрдеди, А. А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов: учеб. пособие / А. А.Эрдеди , Н. А.Эрдеди. - 13-е изд.,стер.- М.: Академия,2019. - 320 с.

4. Эрдеди, А. А.Техническая механика: учеб. / А. А.Эрдеди, Н. А.Эрдеди. - М.:Академия,2018. - 528 с.